UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS - MESTRADO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

José de Arimatéa Rocha

Investigando a Aprendizagem da Resolução de Problemas Combinatórios em Licenciandos em Matemática

Recife
2006

José de Arimatéa Rocha

Investigando a Aprendizagem da Resolução de Problemas Combinatórios em Licenciandos em Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC), da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

José de Arimatéa Rocha
Orientadora: Prof.ª Heloísa F. B. N. Bastos, PhD.
Co-Orientadora: Prof.ª Claúdia H. Dezotti, PhD.

Recife
2006

Ficha catalográfica

Setor de Processos Técnicos da Biblioteca Central – UFRPE

R672i Rocha, José de Arimatéa

Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciandos em matemática / Jose de Arimatéa Rocha – 2006.

140f. : il.

Orientadora : Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos

Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Educação.

CDD 378

1. Ensino superior
2. Combinatória
3. Construtos pessoais
4. Experiência de Kelly
5. Resolução de problemas

I. Bastos, Heloisa Flora Brasil Nóbrega

II. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS - MESTRADO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

José de Arimatéa Rocha

Investigando a Aprendizagem da Resolução de Problemas Combinatórios em Licenciandos em Matemática

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora composta pelos seguintes professores:

____

Heloísa Flora Brasil Nóbrega Bastos, PhD.
Orientadora

____

Paulo Figueiredo Lima, PhD.
1º Examinador UFPE

____

Josinalva Estácio Menezes, PhD.
2º Examinadora UFRPE

____

Claudia Helena Dezotti, PhD.
3º Examinadora UFRPE

Recife, Agosto de 2006

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios por licenciandos do 4º período do Curso de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Nossa pesquisa se desenvolveu em duas etapas: na primeira etapa investigamos essa aprendizagem quando os alunos foram submetidos a uma prática tradicional. Na segunda etapa usamos o Ciclo da Experiência de Kelly para organizar ações que conduzissem os alunos ao planejamento do ensino e apresentação de uma aula em Combinatória agindo como se professores fossem. Constatamos que, em geral, os licenciandos têm dificuldades na resolução de problemas combinatórios construindo pouca aprendizagem durante a prática tradicional. Os resultados também mostram que o uso do ciclo kellyano incorporam possibilidades de práticas que induzem ao raciocínio reflexivo por parte dos alunos e a interação entre eles. Mais ainda, ao conduzir os alunos para agirem como se professores fossem, elaborando um plano de ensino e uma aula sobre Combinatória, o CEK proporcionou que eles incorporassem de modo significativo à aprendizagem de resolução de problemas combinatórios.

ABSTRACT

In this work, we study the learning of the resolution of combinatories problems for students of 4th period of the Course of Mathematics of the Universidade Federal Rural de Pernambuco. Our research was developed in two stages: In the first stage we investigate this learning when the pupils were submitted to a traditional education practice. In the second stage we use the Kelly Experience's Cycle to organize action that the pupils were leading so that they planned education and they presented a lesson on Combinatories, acting as if teachers were. We evidence that in general the students have difficulties in the resolution of combinatories problems constructing little practical learning during the traditional practice. The results also show that the use of the kellyan cycle incorporates possibilities of practical that induce the reflective reasoning on the pupils and their interactive behavior. Yet, when leading the pupils to be acted as if teachers were elaborating a plan of theaching and a lesson on Combinatories, the CEK provided that they incorporated in significant way to the learning of resolution of combinatories problems.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Inácio e Josefa (in memorian) influência maior em minha existência e aos meus irmãos Sebastião, Socorro, Carlos e Severino pelas trocas constantes na condução dessa existência.

À minha esposa Áurea e aos meus filhos Cristiane, Hugo e Eudes, enriquecedores participativos...

Às professoras Heloísa Flora Brasil Nóbrega Bastos e Claudia Helena Dezotti pela competência e dedicação com que me orientaram.

Ao professor Paulo Figueiredo Lima e à professora Josinalva Estácio Menezes pelo apoio e sugestões decisivos na elaboração dessa dissertação.

Aos nossos amigos e amigas do Departamento de Matemática da UFRPE e em especial aos nossos alunos.

Aos professores e professoras do PPGEC e aos amigos e amigas de cujo convívio me apropriei ao longo da realização do mestrado.

A todos que, presentes ou não, instigam minha curiosidade e propiciam possibilidades de autotransformação de meu estar no mundo.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

Como docente no Ensino Superior, temos observado que a departamentalização na Universidade tem provocado uma certa falta de interação entre aqueles departamentos responsáveis pela formação do licenciando. Assim é que, por exemplo, na Universidade Federal Rural de Pernambuco, o licenciando em Matemática convive com disciplinas vinculadas ao Departamento de Educação, que lhes propiciam o saber pedagógico, e disciplinas ligadas ao Departamento de Física e Matemática, as quais cuidam do saber matemático, considerado necessário em sua formação. Esta "separação" departamental, em nossa observação, tem desencadeado no futuro professor, a prática de repetir o modo como vivenciou sua aprendizagem matemática nos bancos escolares da Universidade, muitas vezes deixando de lado os aportes sobre as novas teorias de aprendizagem que são trabalhadas no Departamento de Educação. D'Ambrósio (1993) fala numa visão absolutista que predomina no ensino de Matemática. Bertoni, ratificando essa nossa inquietação, considera tal separação como um ponto de estrangulamento "para operacionalização de uma proposta adequada de licenciatura em matemática" (BERTONI, 1994, p.13).

Atualmente, a concepção de educação como construção humana, baseada em posturas filosóficas de diversas perspectivas epistemológicas, tem gerado teorias que se propõem a descrever condicionantes para essas construções. Tais teorias determinam vários focos de análise relativos ao processo ensino-aprendizagem os quais abordam questões concernentes ao trio aluno x saber x professor ou aos vários ambientes em que cada um desses elementos (ou de sua reunião) se coloca. Em vista disso, um novo campo do saber humano tem tomado forma a partir da necessidade de determinar ações para o ensino de matemática com base científica: A Educação Matemática.

Bicudo, em um texto abrangente sobre a filosofia da Educação Matemática, coloca que "... a Educação Matemática é um todo que se mostra de diferentes modos: na rua, na escola, nas teorias, na cultura, no currículo, na legislação, na política educação, na mídia e na multimídia"(BICUDO, 1999, p.26).

Com tais considerações, Bicudo institui esse campo de conhecimento que, para D'Ambrósio (1993) já tinha caráter universal a partir de meados do século passado. Ainda, D'Ambrósio, ressalta a dependência que a aprendizagem desta disciplina tem da postura do professor, seu companheirismo com os alunos na busca do conhecimento matemático, "um conhecimento que dia-a-dia se renova e se enriquece pela experiência vivida por todos os indivíduos do planeta" (D'AMBRÓSIO, 1993 p.14).

Destaca-se, pois, a importância da formação do professor como objeto de estudo da matemática. D'Ambrósio, no mesmo texto, cita uma pesquisa realizada por professores da UnB[1] em que elaboraram-se várias diretrizes para abranger tal objeto. Dentre elas, colocou-se os "estudos de como desenvolver, no futuro professor, conhecimentos substanciais e integrados, dentro da sua área de como ele poderá desenvolver esses conhecimentos e quais nos futuros alunos". Dentro desta concepção situamos esta pesquisa.

Em outra direção, ao longo de nossa prática esta docente, temos observado que muitas vezes produz um salto qualitativo em nosso saber matemático, indicando raciocínios antes não executados, provocando generalizações não notadas ou instigando novas formas de resolver problemas. Por exemplo, em Análise Combinatória o modelo teórico adotado para desenvolver o conteúdo parece ser insuficiente para que o licenciando enfrente com sucesso toda a carga de problemas que o tema propicia. Em nosso caso particular, apesar de termos compreendido o aspecto formal da teoria desde nossa formação, os aspectos de nossa aprendizagem relativos à resolução de problemas combinatórios foram desenvolvidos ao longo de nosso trabalho como professor no ensino médio, e como professor de futuros professores de matemática, não raro ocorrendo de perceber igual "síndrome" em nossos alunos.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), um dos objetivos do Ensino Médio é o de "Desenvolver as capacidades de raciocínio e de resolução de problemas..." (BRASIL, 1999, p.254). Ora, uma das maiores classes de problemas que surge em matemática é a dos chamados problemas combinatórios. Esses, por sua vez, então na base da teoria da probabilidade, uma das mais importantes teorias matemáticas do ponto de vista de sua aplicação. Pode-se afirmar que não há nenhum ramo da ciência moderna a não fazer uso dos

---

[1] Universidade de Brasília

cálculos combinatórios e probabilísticos. Este fato evidencia-se pela introdução de seu conteúdo na formação de biólogos, físicos, químicos, matemáticos, economistas, engenheiros, etc.

Quanto aos livros didáticos, há uma tendência de se fazer preceder ao estudo de probabilidades, algum conteúdo de Combinatória. Barbosa (1970), em um texto produzido para o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática, já associava esses dois conteúdos, propugnando "dar ênfase aos tópicos cujo professorado brasileiro já aprovou, como é o caso das árvores de possibilidades e as regras básicas do cálculo combinatório"(p.5). Recentemente, Lima et al (2004) contemplam o conteúdo de matemática discreta para o ensino médio pondo Análise Combinatória no capítulo 4 para em seguida, no capítulo 5, estudar Probabilidades. Também, livros de cálculo das probabilidades do ensino superior com Meyer (1983) colocam um capítulo de pré-requisitos incluindo conteúdos da combinatória elementar.

Por outro lado, o chamado "tratamento da informação" é considerado pelos PCN como um dos requisitos para a cidadania. Tal fato é confirmado quando fazendo referência aos dois aspectos básicos do ensino da Matemática, eles citam:

> "... um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, quadros, figuras) e o outro consiste em relacionar essas representações com os princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada levando-se o aluno a "falar" e "escrever" sobre matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar os dados..."
>
> (BRASIL, 1997, p.19)

Claramente, um dos pré-requisitos para o tratamento da informação é o raciocínio combinatório.

Os fatos acima atestam a importância do ensino de combinatória. Noutra direção, uma tendência notada é que cada vez mais o conteúdo das noções de Combinatória e Probabilidade tem se deslocado para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental. Esse deslocamento, apesar de embrionário, parece indicar a retomada do ponto central do ensino deste conteúdo, qual seja, aprendizagem da noção de contagem em seus diversos enfoques. O grande número de pesquisas que estão sendo realizadas sobre o processo de ensino-aprendizagem de Combinatória tem-se direcionado quanto aos aspectos da aprendizagem e tendo como sujeitos, geralmente, alunos do ensino fundamental ou médio. O levantamento realizado por Fiorentini (1994) comprova esta afirmativa. Daí, nossa preocupação em investigar a situação desta aprendizagem nos licenciandos do curso de Matemática, futuros autores de seu ensino.

1.1. Problema

Em qualquer relato sobre a concepção do trabalho do matemático, a resolução de problemas é parte essencial. Dois dos documentos mais antigos que registram a atividade matemática da humanidade são, de fato, coletâneas de problemas: O papiro de Moscou, datado de aproximadamente 1850 a.C., contendo 25 problemas, e o Papiro de Rhind com 85 problemas catalogados pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. (EVES, 2004). Em seu índice remissivo, o texto de Eves sobre Introdução da História da Matemática, relaciona mais de 50 itens a respeito da palavra problema, alguns trazendo referências a problemas do saber comum, como o “Problema da Coroa” ou o “Problema do Bambu Quebrado”, outros ligados ao saber matemático, como o “Problema de Plateau” ou o “Problema das Quatro Cores”, alguns deles geradores de vasta teoria matemática. Revistas científicas de matemática trazem, entre suas seções, uma dedicada aos problemas e os livros didáticos dessa disciplina coroam cada capítulo com uma lista de problemas, para resolução por parte dos alunos, como modo de confirmação do saber construído por eles. Na Educação Matemática, a resolução de problemas é tida como uma metodologia eficaz para o ensino de matemática (DANTE, 1991). Entretanto, pesquisas consideram ser mais fácil adquirir habilidade para calcular ou compreender um conceito do que para resolver problemas (LE BLANC, 1977). Ademais, tais pesquisas apontam na direção de que o conhecimento formal do conteúdo matemático é insuficiente para guiar o aluno na resolução de problemas, como ratifica Echeverria (1998) ao dizer que “no caso dos problemas não basta conhecer uma determinada técnica ou um determinado algoritmo para usá-los na tarefa”.

Diante das considerações acima, pensamos investigar a resolução de problemas combinatórios por parte dos licenciandos em Matemática. Ora, nossa prática pessoal tem mostrado que o modo tradicional do ensino desse conteúdo matemático tem provocado pouco sucesso em sua aprendizagem por parte dos alunos. Daí, por estarmos interessados em realizar tal investigação com licenciandos em matemática, pensamos fazê-lo em um ambiente em que os próprios licenciandos fossem autores do ensino daquele conteúdo de um modo ativo e que incorporasse, de alguma forma, a dinâmica pressuposta nesse processo. Isto é, o que tomamos como problema é o de verificarmos se:

Pode uma simulação da prática docente por parte de licenciandos de matemática desenvolver nos mesmos a aprendizagem na resolução de problemas combinatórios?

Daí, além de organizar essa prática docente, o que implicava determinar procedimentos para a sua realização, nós tínhamos que nos posicionar sobre qual teoria de aprendizagem iríamos situá-la. Escolhemos como tal a Teoria dos Construtos Pessoais de George Kelly. Essa escolha se deveu não só pela nossa afinidade sobre os pressupostos epistemológicos desta teoria, de sua concepção de aprendizagem, como também do fato de que ela nos fornece, um modelo de como dirigir as ações de ensino: O Ciclo da Experiência de Kelly.

Claro há uma hipótese geral por traz dessa tomada de posição, que passamos a enunciar.

1.2.Hipótese

Uma intervenção didática organizada segundo o Ciclo da Experiência de Kelly para que licenciandos em matemática elaborem um plano de ensino e apresentem uma aula sobre Análise Combinatória, agindo como se professores fossem, desenvolve nos mesmos uma aprendizagem significativa na resolução de problemas desse conteúdo.

1.3.Objetivos

Como objetivo geral temos, pois:

1.3.1 Objetivo Geral

Investigar a aprendizagem da resolução de problemas em Análise Combinatória por parte de licenciandos em matemática na UFRPE, submetidos a uma intervenção seguindo o Ciclo da Experiência de Kelly, que organize a simulação de uma prática docente nesse conteúdo pelos mesmos.

Como objetivos específicos, nos propusemos:

1.3.2. Objetivos Específicos

Avaliar a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios nos licenciandos de matemática quando:

- Eles são submetidos a uma prática tradicional de ensino;
- Eles são submetidos a uma prática que seguindo o Ciclo da Experiência de Kelly os conduzam a refletirem sobre o ensino de Análise Combinatória, a elaborarem um plano de ensino sobre esse conteúdo e a apresentarem uma aula sobre o mesmo, agindo como se professores fossem.

Sentimos necessidade de avaliar a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em uma prática tradicional de ensino, para confirmar ou não nossa inquietação inicial sobre o que consideramos como “pouco sucesso” na aplicação de tal espécie de prática para o ensino de combinatória. Nosso plano de trabalho inclui uma fundamentação teórica (Capítulo 2) em que levantamos os aspectos teóricos relevantes para a pesquisa quanto ao conteúdo matemático em si (Teoria Combinatória) e ao conteúdo que fundamenta nossa teoria de ensino (Teoria dos Construtos Pessoais de Kelly). No capítulo 3 indicamos a metodologia de abordagem da pesquisa, no capítulo 4, fizemos nossa análise de resultados e por fim, colocamos, no capítulo 5, as conclusões obtidas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Dois pólos de saber compõem a Fundamentação Teórica de nossa pesquisa: A Análise Combinatória e a Teoria dos Construtos Pessoais de Kelly, os quais passamos a resumir.

2.1. A Teoria Combinatória

A seguir, após fazermos um certo histórico da Combinatória e defender sua relevância para o ensino, delimitamos o conteúdo dessa disciplina a ser trabalhado na pesquisa e elaboramos algumas considerações sobre a resolução de problemas em Combinatória Simples, indicando nossa visão sobre a temática.

2.1.1. Histórico e Relevância da Combinatória para o Ensino

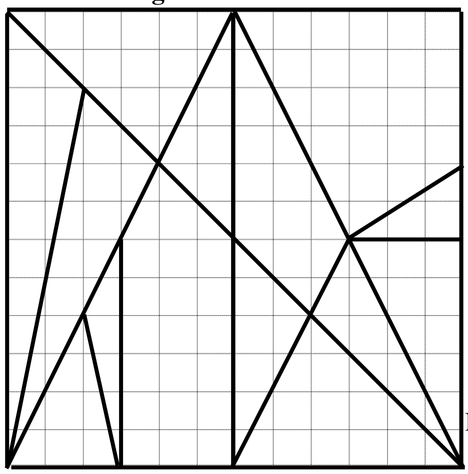
De um modo bem elementar, a combinatória é o ramo da matemática responsável pela definição, classificação e resolução de problemas de contagem. Está, pois, incluída em um universo matemático ao qual o indivíduo tem acesso desde o início de sua formação escolar. Tanto é assim que um dos objetivos gerais para o Ensino Fundamental é que o aluno venha a:

> "...fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, <u>combinatório</u>, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;"
>
> (BRASIL, 1999, p. 51)

Especificamente, as recomendações dos PCN determinam que "...relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações problemas que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especificamente, o princípio multiplicativo da contagem" (Idem, p. 57).

Registros históricos dedicam a Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) preocupações combinatórias. É dele a divulgação do *stomachion*, um aparente jogo de montar formado por um quadrado e quatorze peças a serem encaixadas nele, conforme Figura 1 abaixo:

Figura 1: Stomachion



Fonte: (TAVARES & BRITO, 2005, p. 34)

Segundo o historiador matemático R. Nietz, da Universidade de Stanford, Califórnia, a idéia de Arquimedes era determinar o número de formas distintas de encaixe das peças (TAVARES & BRITO, 2005).

Modernamente, a Teoria Combinatória remonta às idéias dos matemáticos Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) sobre a resolução de problemas relacionados a jogos de azar. O chamado "triângulo de Pascal", já conhecido na Arábia no século XI, é usado por Pascal para derivar resultados sobre o desenvolvimento do binômio $(a + b)^n$, com n natural, sendo generalizado por Newton em 1676, para n racional (BOYER, 1974).

Um passo importante para o desenvolvimento dessa matemática é dado então com a organização da Teoria das Probabilidades por, entre outros, Euler (1710 – 1761), Laplace (1749 – 1827) e Dirichlet (1805 – 1859), elaborador do simples, mas criativo, Princípio das Gavetas. Nascida em grande parte no seio de problemas aplicados, como o famoso problema das quatro cores, a Combinatória tomou corpo de modo a ser uma das mais profícuas teorias matemáticas do mundo moderno, relacionando-se com a Topologia, a Teoria dos Grafos, a Computação, a Criptografia, a Estatística etc, tanto no modo puro como no modo aplicado à construção do saber matemático (DIEUDONNÉ, 1990).

Apesar de não ser objetivo de nosso trabalho tratar dos aspectos relativos à história desse conteúdo no currículo escolar, consideramos importante uma reflexão sobre tal temática, visando estabelecer ainda mais sua relevância, tendo em vista nosso objetivo. Diante do vasto universo histórico da educação no Brasil, achamos conveniente situar nossas considerações após a chamada Reforma Francisco Campos, realizada após 1930, durante o Governo Provisório de Getúlio Vargas. Em decreto-lei de n° 19890 de 18/04/1931, o então Ministro da Educação e Saúde, Sr. Francisco Campos, propôs a organização do ensino secundário, quebrando a chamada tradição dos cursos preparatórios na estrutura de ensino no Brasil. O ensino secundário então ficou dividido em dois ciclos: o fundamental, com cinco anos, e o complementar, com dois anos. A matemática compõe os sete anos do ensino secundário, à exceção dos candidatos que desejassem concorrer para o ingresso nos cursos de Direito (ROMANELLI, 1978).

Uma boa transcrição da Matemática para o ciclo fundamental encontramos em parte da obra do Professor Jacomo Stávale, publicada pela Companhia Editora Nacional durante as décadas de 30, 40 e 50 do século passado. Em seus “Exercícios de Matemática: Quinto ano”, para o ano de 1939, encontramos problemas sobre Permutações, Arranjos e Combinações Simples. Vejamos alguns exemplos:

> “1.Quantas permutações podemos efetuar com as 10 letras da palavra Pernambuco, de modo que as quatro vogais fiquem sempre na mesma ordem, a saber: e,a,u,o?
> 2.De quantos modos diferentes 8 navios podem entrar em um porto, um depois do outro?
> 3.Um Congresso Legislativo é constituído por 12 deputados governistas e 7 oposicionistas. De quantos modos se pode organizar uma comissão com 3 governistas e 2 oposicionistas?”
>
> (STÁVALE, 1939, p. 12-14).

Também, a Álgebra Elementar da Coleção FTD (Com imprimatur: São Paulo, 2 de junho de 1938; Mons Ernesto de Paula), inclui em seu Livro V, Capítulo I o seguinte conteúdo:

> “LIVRO V – BINÔMIO E APLICAÇÕES
> CAPÍTULO I – Binômio de Newton...284
> I – Cálculo do número dos arranjos..................................285
> II – Cálculo do número de permutações.............................287
> III – Cálculo do número das combinações...........................288
> IV – Binômio de Newton..290
> V – Triângulo de Pascal..295”
>
> (PAULA, 1938, p.598).

Em 1942 foi publicada a Lei Orgânica do Ensino Secundário, por iniciativa do então Ministro Gustavo Capanema, durante a vigência do Estado Novo. Foram criados o ginásio com quatro anos e o colegial (científico ou clássico) com três anos, ficando o assunto de Combinatória sendo lecionado durante o segundo ano do Científico. Livros como o Curso de Álgebra de Farias (1967) atestam a manutenção desse conteúdo, sem alteração em sua formatação. Até mesmo a reforma educacional determinada pela Lei 5692 de 11/08/1971 não investiu em nenhuma modificação, parecendo ser a Combinatória, assunto a ser mantido no mesmo padrão temporal do conteúdo matemático elementar.

O chamado movimento pela Matemática Moderna, que teve seu auge no Brasil nos anos 1970-1980, empreendeu uma grande modificação na tentativa de melhorar o ensino de Matemática, fato que implicou em uma certa modificação para o ensino de Combinatória, infelizmente, com muita ênfase na formalização do conteúdo e pouco esforço no direcionamento para efetiva aprendizagem do aluno. Na próxima seção, faremos uma análise desta influência de modo mais particular.

A partir de 1982, a Sociedade Brasileira de Matemática direcionou mais efetivamente suas preocupações para o ensino, mantendo a Revista do Professor de Matemática e publicando textos dirigidos a essa categoria. No prefácio do volume dois da coleção "A Matemática do Ensino Médio" vê-se um pouco da linha de ação adotada:

> "O programa de Matemática da segunda série do Ensino Médio tem dois temas centrais: o estudo de Matemática Discreta e a introdução à Geometria Espacial. É comum e natural que o aluno sinta dificuldades iniciais em ambos os temas. Alguns tópicos da Matemática Discreta – Análise Combinatória, por exemplo – utilizam técnicas bem diferentes daquelas a que o aluno está acostumado. Nesses tópicos, o aluno precisa colocar em jogo seu raciocínio crítico e criativo com muito mais freqüência do que nas séries anteriores. Por outro lado, a Geometria Espacial envolve um esforço de imaginação bastante superior ao da Geometria Plana, principalmente devido às limitações causadas pela representação bi-dimensional das figuras.
> Para ajudar os alunos a superar estas dificuldades, é fundamental que os professores tenham um bom domínio do material a ser coberto. Não é suficiente que o professor simplesmente saiba resolver os problemas comumente apresentados no livro-texto. Sem uma orientação adequada, corre-se o risco de transmitir para os alunos a idéia de que esses assuntos requerem o uso de um enorme manancial de truques, reforçando a idéia que a Matemática é um assunto difícil e exclusivo de uns poucos.
>
> (LIMA et al, 2004, prefácio)

Sem dúvida, essa é uma orientação mais adequada para o tratamento matemático da combinatória elementar. Contudo, no nosso modo de entender, o pressuposto filosófico adotado está centrado mais no objeto da relação básica do conhecimento sujeito x objeto, ou seja, o conhecimento matemático em si. Outras preocupações devem ser dirigidas, para melhor compreensão desta relação, o que, felizmente, vem sendo feito no Brasil, pelos Centros de Estudos em Educação Matemática, existentes em diversas Universidades, bem como pelo trabalho das diversas Sociedades de Educação Matemática já em funcionamento. A própria existência dos PCN aponta na direção de uma atuação progressiva na utilização das técnicas de contagem, reivindicando sua utilização para níveis mais elementares no ensino.

2.1.2. Análise Combinatória Simples

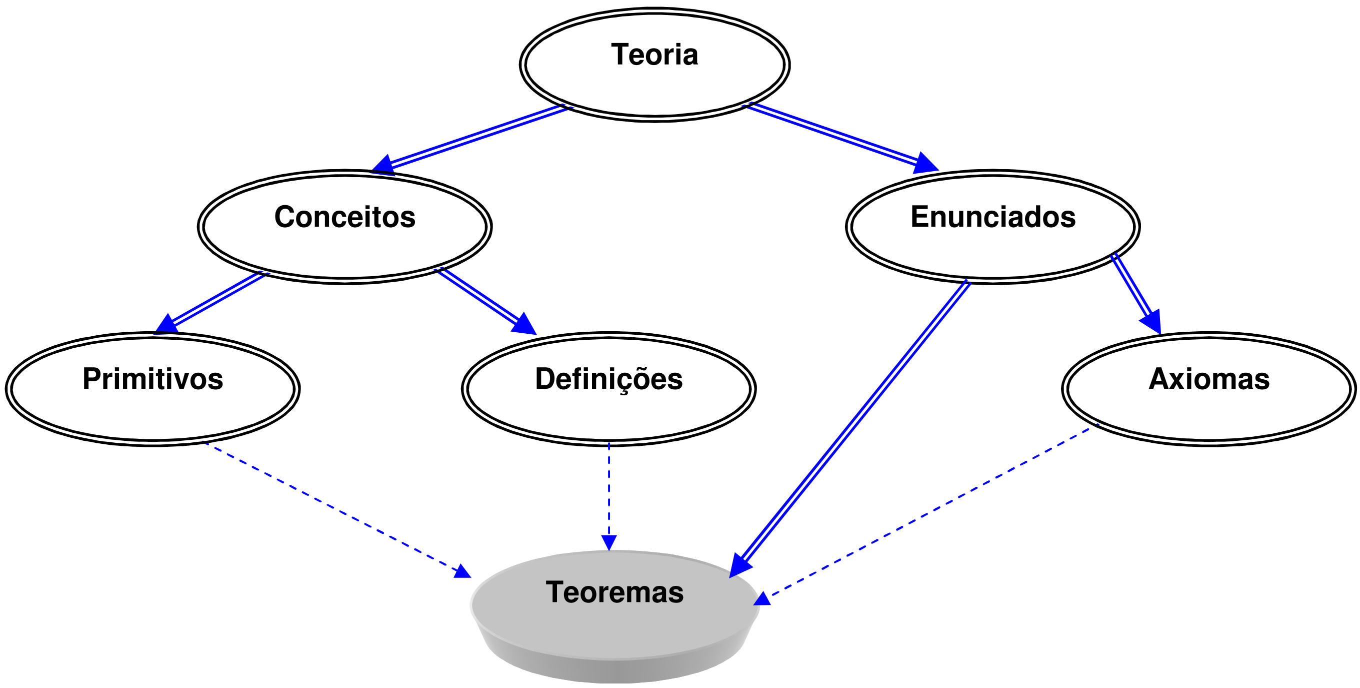
Para esta pesquisa, o que estamos chamando de Combinatória Simples reduz-se apenas ao estudo dos chamados agrupamentos simples, em que não ocorrem repetições de elementos. O cenário matemático básico é simples nos moldes do que ocorre em Dante (2000), por exemplo. A partir dos conceitos básicos de agrupamentos (conjuntos, seqüências ou uplas) e dos chamados princípios fundamentais de contagem (Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo) infere-se o cálculo do número de certos tipos de agrupamentos chamados Arranjos, Permutações ou Combinações Simples. A técnica central deriva da noção de fatorial de um número natural. Uma série de problemas é resolvida ou proposta, em geral em contextos não necessariamente advindos da matemática.

O procedimento padrão para apresentação de uma Teoria Matemática tem seguido as idéias acima, sendo originado por Euclides em seus “Os Elementos” do século III a.C., sendo chamado de método axiomático. Para o lógico Newton C. A. da Costa:

> Para se estudar uma teoria pelo método axiomático, procede-se assim: escolhe-se certo número de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações; obtém-se, dessa maneira, uma *axiomática material* da teoria dada; deixam-se de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos, considerando-os como termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas. Procuram-se, então, as conseqüências do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes.
>
> (COSTA, 1977, p.31)

O uso de tal método constitui o que pode ser chamada concepção formalista da Matemática, que, segundo Costa "deseja transformar o método axiomático, de técnica que é, na essência da Matemática" (ibid, p.33). Assim, o modo como é apresentada uma Teoria Matemática pode ser resumido na forma representada na Figura 2 abaixo:

Figura 2: Mapa da Organização interna de uma Teoria Matemática



Nesse método, a forma básica de enunciado matemático é a implicação "se p ... então q", tendo como alicerce lógico para seu desenvolvimento, entre outros, o famoso "princípio do terceiro excluído". O matemático encontra aqui um modo "de economizar pensamento e sistematizar teorias", (ibid, p.33). Uma tal padronização do conhecimento matemático tem evidente interferência na confecção do livro didático de matemática e na prática corrente da docência nessa disciplina, o que impõe ao aluno um discurso ao qual ele não está acostumado. Vejamos o que ponteiam os autores Bicudo & Garnica (2003) a esse respeito:

> "Na sala de aula de Matemática, posturas e valores, próprios do campo de pesquisa, insinuam-se, são reproduzidos, fortalecidos e legalizados. Há um deslizamento da prática pedagógica da Matemática, prevalecendo o discurso científico sobre o discurso pedagógico,.."
>
> (BICUDO & GARNICA, 2003, p.60).

Ainda,

> "Nesse deslizamento de concepções, parece ser natural que a forma de argumentação utilizada para garantir a validade do conhecimento matemático seja, hegemonicamente, a prova rigorosa, a demonstração formal. Ela é o foco de convergência dos olhares quando da gestação, geração, análise e avaliação do conhecimento matemático, quer seja na prática científica, quer seja na prática pedagógica desenvolvida, principalmente nos cursos superiores".
>
> (id. P. 60)

Nossa prática de ensino tem mostrado que o enfoque no formalismo matemático é uma das principais razões do fracasso nessa disciplina. Para Morris Kline em artigo de 1970:

> "...a matemática é uma atividade cujo primado é da atividade criativa, e pede por imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e confusões. Mesmo quando um matemático está convencido de que seu resultado é correto, há muito para ser criado até encontrar a prova disso. Como Gauss afirmou: 'Tenho meu resultado, mas ainda não sei como obtê-lo'. Todo matemático sabe que trabalho árduo é necessário e o sentido da realização deriva do esforço criativo. Construir a forma dedutiva final é uma tarefa entediante. A lógica não descobre nada, nem o enunciado de um teorema nem sua prova, nem mesmo a construção de formulações axiomáticas de resultados já conhecidos. Há um outro motivo pelo qual a versão lógica é uma distorção. Os conceitos, teoremas e provas emergem do mundo real. A organização lógica é posterior".
>
> (KLINE ,1970 apud BICUDO & GARNICA, 2003, p.61).

Sendo tal organização lógica "posterior", como pudemos fazer dela a razão de ser do ensino de matemática? De fato, essa tradição do formalismo em matemática parece ser uma teia difícil de evitar. Vejamos o que um clássico da Análise Combinatória do ensino médio opina:

> "O estudo da Análise Combinatória sempre constituiu sério obstáculo aos alunos do curso colegial, atual 2° grau.
>
> Calcada tradicionalmente em definições e fórmulas, seu ensino habitua os estudantes a um trabalho mecânico que muitas vezes exclui a compreensão do que estão fazendo. A confusão entre arranjos e combinações é comum em classes de principiantes. E, em geral, o professor só consegue desenvolver os agrupamentos simples, pois quando tenta abordar os agrupamentos com repetição, a situação se complica.
>
> Os autores conseguiram, neste Prelúdio à Analise Combinatória, ensinar de forma clara e objetiva os fundamentos desta parte da Matemática. Baseando-se no Princípio Multiplicativo, desenvolvem toda a conceituação à luz de um raciocínio unificado, onde as fórmulas, até as mais complicadas aparecem espontaneamente, à medida que o estudante descobre como se formam os grupos de objetos, aprendendo também, concomitantemente, a identificá-los."
>
> (BACHX et al, 1975, apresentação).

Apesar da intenção pedagógica mencionada acima, os autores desse clássico passam imediatamente ao desenvolvimento de sua teoria. Nele o formalismo fica claro.

No quadro 1, resumiremos o desenvolvimento desse texto, pelos autores, do ponto de vista de sua axiomática “escondida” e em sua interseção com o conteúdo matemático tratado em nossa pesquisa. Os números ao lado indicam a primeira página em que cada termo aparece no texto.

Quadro 1: Axiomática “Escondida” em um texto de Matemática

CONCEITOS PRIMITIVOS	DEFINIÇÕES	POSTULADOS	TEOREMAS
▪ Acontecimento (1) ▪ Ocorrência (1) ▪ Agrupamento (1) ▪ Número Natural (29)	▪ Fatorial (29) ▪ Permutação simples (36) ▪ Combinações simples (54) ▪ Combinações complementares (57) ▪ Arranjos simples (234)	▪ PM: Princípio Multiplicativo (3)	▪ Extensão do PM (8) ▪ $P_n = n!$ (37) ▪ $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ (55) ▪ $C_n^p = C_n^{n-p}$ (57) ▪ A_n^p (240)

Fonte: Bachx et al (1975)

Em geral, nessa forma de discurso, a maneira encontrada de torná-lo didático é a interposição de exemplos ao longo do texto ou da aula, seguindo-se lista de problemas (ou exercícios de fixação).

Recentemente, Dornelas (2004) propõe o uso do Princípio Multiplicativo como recurso didático para o ensino. Os textos da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que tratam do tema também apóiam esta direção (Lima et al 2004, Morgado et al 1991). A importância da temática, entretanto, merece mais estudos na direção de atrelá-la aos resultados obtidos pelas teorias de aprendizagem modernas.

2.1.3. A Resolução de Problemas Combinatórios

A resolução de problemas em Matemática, como já mencionamos, é parte do saber que esta disciplina pressupõe. Muito do conhecimento matemático surge de problemas advindos de sua tessitura interna, sendo alguns desses problemas geradores de Teorias Matemáticas, como atesta, por exemplo, a moderna Teoria dos Grafos (WEST, 2001). Por outro lado, a própria resolução de problema tem sido concebida como uma metodologia para o ensino da

Matemática, tendência cada vez mais corrente e amplamente recomendada pelos PCN. Nesse sentido, muito se tem produzido no Brasil como comprovam Gazire (1989), Dante (1991), Andrade (1998) e outros. A maior parte dessa pesquisa, contudo tem sido dirigida a conteúdos do ensino fundamental (FIORENTINI, 1994). Entretanto, a necessidade de operacionalizar as recomendações dos PCN, demanda mais pesquisas, principalmente no que diz respeito ao Ensino Médio e à formação de professores aptos para essa tarefa.

A temática da resolução de problemas, segundo Andrade (1998) teve suas experiências mais remotas com Dewey, entre 1896 e 1904, recebeu influência fundamental com Polya, em 1945, e criou corpo definitivo a partir das recomendações da Association of Teachers of Mathematics para os anos da década de 1980.

Os eixos dessas pesquisas, segundo Schroeder & Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999, p.206) apontam nas direções indicadas no Quadro 2:

Quadro 2: Direções dos Eixos de Pesquisas

ENSINAR

- **A RESOLVER PROBLEMAS**
- **SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**
- **MATEMÁTICA COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Para Onuchic, entretanto:

> "A compreensão de matemática, por parte dos alunos envolve a idéia de que entender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando o aluno é capaz de relacionar uma determinada idéia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de idéias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias idéias matemáticas contidas num problema. As indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende as idéias matemáticas específicas surgem, com freqüência, quando ele resolve um problema. Acreditamos que, ao invés de fazer da resolução de problemas o foco do ensino da matemática, professores, autores de livros, promotores de currículos e avaliadores de aprendizagem deveriam fazer da compreensão seu ponto central e seu objetivo. Fazendo isso, eles mudariam a visão estreita de que a matemática é apenas uma ferramenta para resolver problemas, para uma visão mais ampla de que a matemática é um caminho de pensar e um organizador de experiências."
>
> (ONUCHIC, 1999, p.208)

Temos aqui uma outra diretriz que pretendemos explorar em nossa pesquisa. Mais do que o formalismo ou a ênfase exagerada na resolução de problemas, essa disciplina deve ter o objetivo de ser “um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual pode ser aplicado aquilo que previamente havia sido construído” (Idem, p. 208).

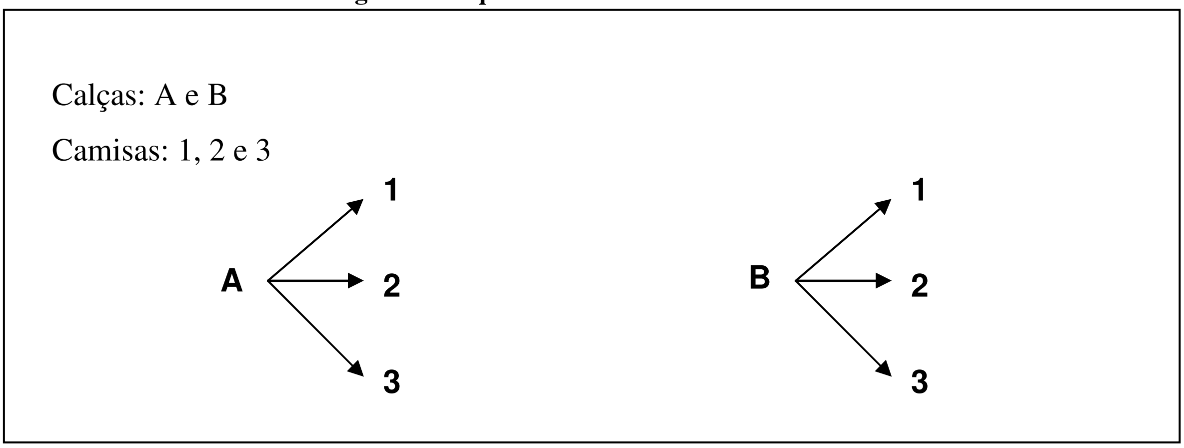
A escolha do conteúdo de Combinatória Simples como lastro matemático de nossa pesquisa teve por base as observações de que:

- a resolução de problemas constitui a essência do conteúdo trabalhado;
- a teoria matemática subjacente é fácil de ser estabelecida;
- tem resistido às mudanças implementadas no currículo escolar;
- é um conteúdo dificilmente construído pelos alunos do Ensino Médio.

A idéia básica nesta teoria é a de contar os elementos de uma coleção. Tal idéia faz surgir, em seus rudimentos, o conceito de número natural, através da hoje chamada correspondência biunívoca, também designada função bijetora. A ação de agrupar coleções gerou, ao longo do tempo, a operação de adição de números naturais, bem como a de multiplicação (agrupamento de coleções com mesmo número de elementos). Segundo Loureiro (1997), essa idéia de multiplicação tem um <u>sentido</u> <u>aditivo</u>, o qual serve de fonte para muitos problemas de matemática nas séries iniciais e implicando em duas espécies de dificuldades para os alunos: o domínio de cálculo e a decisão sobre qual operação usar.

Tal sentido, porém, não esgota todo o significado da multiplicação no âmbito dos números naturais (LOUREIRO, 1997). Por exemplo, se José tem duas calças e três camisas, quantos conjuntos de roupa ele pode formar? O esquema de uma “árvore combinatória“ permite resolver tal problema:

Figura 3: Esquema da Árvore Combinatória



As escolhas são, pois, A1, A2, A3, B1, B2, B3, totalizando $2 \times 3 = 6$ conjuntos de roupa.

Para Loureiro:

> "Neste momento há duas idéias importantes a reforçar. Uma é a possibilidade de acrescentar quantas componentes quisermos à arvore, e poder fazer-se a contagem sem precisar de a construir. A outra é o crescimento rápido do número de possibilidades obtidas que permite colocar questões interessantes e quase sempre não intuitivas (....)
> É a perspectiva combinatória que de facto completa todo o poder da multiplicação. O princípio da multiplicação, ou princípio fundamental da contagem, é a base da combinatória. Este princípio afirma que o número total de escolhas que posso fazer numa série de decisões é o produto do número de opções disponíveis para cada decisão, sendo o número de factores o número de decisões a tomar".
> (LOUREIRO, 1997, p.16)

É essa perspectiva combinatória da multiplicação, que, a nosso ver, a visão formalista da Matemática torna um dos postulados básicos para erigir a Teoria. Em nosso tema de pesquisa, assumimos a insuficiência desse tratamento para a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios e, com um olhar nos sujeitos da pesquisa, pensamos na necessidade de atrelar a alguma teoria de aprendizagem consistente. Nesse sentido, é importante destacar que nossa caracterização de problema combinatório segue os passos de Mayer (1983) no sentido de ser composto por dois processos básicos (tradução e solução do problema) assim resumidos por Echeverria:

> "...o processo de solução de problemas exige, em primeiro lugar, que uma pessoa compreenda o problema e o traduza para uma série de expressões e símbolos matemáticos. A partir daí, deve programar uma série de estratégias que estabeleçam as diferentes submetas que pretende alcançar para chegar à solução final e as técnicas que permitam atingir cada uma das submetas. Finalmente, essa pessoa deve interpretar os resultados obtidos e traduzi-los como uma solução plausível. Nestes dois processos pode-se estabelecer uma correspondência com os três grandes eixos procedimentais estabelecidos nos currículos de Matemática: utilização de diferentes linguagens, utilização de algoritmos e utilização de habilidades. Assim, a tradução do problema incide, justamente, na utilização de uma linguagem matemática que permita interpretar a realidade circundante, enquanto o segundo passo, a solução de problemas, faz referência à utilização estratégica de fatos, técnicas e habilidades dentro de um contexto matemático".
> (MAYER, 1983 apud ECHEVERRIA & POZO, 1998 p. 51 - 52)

Vê-se que um certo componente semântico aparece nessa concepção de resolução de problemas. Esse fato acrescenta aos problemas combinatórios a preocupação com os significados que seus termos podem ter para o aluno. Levando em consideração que os sujeitos de nossa pesquisa são estudantes de uma Licenciatura em Matemática, tentamos eliminar ou diminuir tais dificuldades, usando nos testes nela efetuados problemas combinatórios cujos termos fossem intrínsecos ao contexto da matemática elementar.

Para alguém com postura filosófica diretiva sobre o ensino de matemática, o conhecimento formal dessa disciplina é suficiente para seu ensino. Em nossa perspectiva, pensamos o enfoque reflexivo permitido pela ação docente o qual aliando ao saber teórico da disciplina (Análise Combinatória), posicionamos o saber pedagógico necessário para o planejamento e apresentação de uma aula sobre esse conteúdo matemático. Nesse caso, validando esse saber consideraremos como base a Teoria dos Construtos Pessoais de George Kelly a seguir resumida.

2.2. A Teoria dos Construtos Pessoais de G. Kelly

Em 1963 era lançado o livro “A THEORY OF PERSONALITY: The Psychology of Personal Constructs” escrito por George A. Kelly, norte-americano nascido em 1905, graduado, em Matemática e Física, mestre em Sociologia Educacional e doutor em Psicologia (MOREIRA, 1999). O livro, contendo três capítulos e cento e noventa páginas é na realidade um escorço da obra em dois volumes publicados em 1955 pela W. W. Norton. O resumo a seguir é em parte calcado nessa obra e em parte nas orientações dadas por Moreira (1999), Cloniger (1999) e Bastos (1992). Algumas citações em inglês foram mantidas como modo de permitir alguma percepção das idéias originais de Kelly.

2.2.1. Considerações Gerais

A organização desse livro parece denunciar a formação matemática de seu autor. No capítulo sobre O ALTERNATIVISMO CONSTRUTIVO (capítulo 1), ele descreve seu corpo teórico. O ponto de partida é o homem e o mundo em que se encontra. Para Kelly, “o universo está realmente existindo e o homem está gradualmente compreendendo-o” (MOREIRA, 1999, p. 123).

Além disso, segundo Moreira (1999), há por parte dele, a hipótese eminentemente física de que “o universo pode ser medido ao longo de uma dimensão temporal” (p.124). Ele vê o homem como um “homem-cientista“, que busca prever e controlar o fluxo de eventos em seu entorno. Sobre a vida, o próprio Kelly afirma ser ela:

> “...to our way of thinking, is more than mere change. It involves an interesting relationship between parts of our universe where in one part, the living creature, is able to bring himself around to represent another part his environment. Sometimes it is said that the living thing is sensitive, in contrast to the nonliving thing, or that he is capable of reaction. This is roughly the same distinctive characteristic of life that we envision. But we like our formulation better because it emphasizes the creative capacity of the living thing to represent the environment, not merely to respond to it. Because he can represent his environment, he can place alternative constructions upon it and, indeed, do something about it if doesn’t suit him. To the living creature, then, the universe is real, but it is not inexorable unless he chooses to construe it that way.”[2]
> (KELLY, 1963, p. 8).

A partir daí, ele estabelece a noção de construto, central em sua teoria, resumida claramente na citação seguinte.

> “They are ways of construing the world. They are what enables man, and lower animals too, to chart a course of behavior, explicitly formulated or implicitly acted out, verbally expressed or utterly inarticulate, consistent with other courses of behavior or inconsistent with them, intellectually reasoned or vegetatively sensed.[3]”
> (KELLY, 1963, p. 9).

Os construtos são pautas de trabalho criadas pelo homem para a análise do mundo, são construções semelhantes àquelas criadas pelos cientistas como teorias explicativas em contínuo processo de evolução. Assim, por exemplo, um conceito como o de “ensinar combinatória” é visto por Kelly como multidimensionalmente formados por construtos que permeiam o conjunto de possibilidades que um professor desse conteúdo tem para criar suas pautas de trabalho quanto ao ato de efetivamente executar esse ensino.

---

[2]" ...para a nossa maneira de pensar, é mais que mera mudança. Envolve uma relação interessante entre partes de nosso universo onde em uma parte, a criatura viva, pode se tornar capaz de representar outra parte, o ambiente a sua volta. Às vezes é dito que a coisa viva é sensível, em contraste com a coisa não viva, ou que ele é capaz de reação. Esta é aproximadamente a mesma característica distintiva de vida que nós imaginamos. Mas nós preferimos nossa formulação porque enfatiza a capacidade criativa da coisa viva para representar o ambiente, não somente responder a ele. Porque ele pode representar o ambiente dele, colocar construções alternativas nisto e, realmente, ser algo sobre isto se não lhe é adequado. Para a criatura viva, então, o universo é real, mas não é inexorável a menos que ele escolha construí-lo desse modo”. (Tradução Livre)

[3] Eles são modos de construir o mundo. Eles são o que habilita o homem, e os animais inferiores também, a mapear um curso de comportamento, explicitamente formulado ou implicitamente reagido, verbalmente expressado ou totalmente inarticulado, consistente com outros cursos de comportamento ou incompatível com eles, intelectualmente argumentados ou vegetativamente sentidos. (Tradução Livre)

Em suma, o homem ao estabelecer suas convicções, através de aproximações sucessivas, estabelece também seu grau de liberdade, sua dependência ou não dos eventos. Esses, não subordinam o sistema de construtos adotados, mas, a teoria adotada os interliga de modo temporário, até que seja rejeitado pelo homem.

2.2.2. A Teoria Básica

Este é o título do segundo capítulo de seu livro. Após enunciar seu postulado fundamental, ele elabora onze corolários dele decorrentes. Para cada enunciado, há, por parte de Kelly, a preocupação em descrever o significado dos termos usados. O quadro 3 traz o resumo desse postulado e seus corolários, sem nenhum critério de ordenação dos mesmos, constituindo-se numa fonte prática, ao nosso ver, de consulta para futuras referências. Ele traz os principais resultados de Kelly, elementos significativos para nossa pesquisa principalmente o chamado corolário da experiência, nosso foco maior no que diz respeito a essa teoria.

Quadro 3: Resumo da Teoria de Kelly

<table>
<tr><td colspan="2">POSTULADO FUNDAMENTAL:
Os processos de uma pessoa são psicologicamente canalizados pelas maneiras nas quais ela antecipa os eventos.</td></tr>
<tr><td>Corolário da Construção:
Uma pessoa antecipa os eventos construindo suas réplicas.</td><td>Corolário da Individualidade:
As pessoas diferem umas das outras nas suas construções de eventos.</td></tr>
<tr><td>Corolário da Organização:
Cada pessoa, caracteristicamente, desenvolve, para sua conveniência na antecipação de eventos, um sistema de construção incorporando relações ordinais entre construtos.</td><td>Corolário da Escolha:
A pessoa escolhe para si aquela alternativa, em um construto dicotomizado, por meio da qual ela antecipa a maior possibilidade de extensão e definição de seu sistema de construção.</td></tr>
<tr><td>Corolário da Dicotomia:
O sistema de construção de uma pessoa é composto de um número finito de construtos dicotômicos.</td><td>Corolário do Âmbito:
Um construto é conveniente apenas para a antecipação de um âmbito limitado de eventos.</td></tr>
<tr><td>Corolário da Modulação:
A variação no sistema de construção de uma pessoa é limitada pela permeabilidade dos construtos dentro dos âmbitos de experiência em que as variantes se situam.</td><td>Corolário da Comunalidade:
Na medida em que uma pessoa em prega uma construção da experiência que é similar àquela empregada por outra pessoa, seus processos psicológicos são similares ao da outra pessoa.</td></tr>
<tr><td>Corolário da Fragmentação:
Uma pessoa pode empregar, sucessivamente, uma variedade de subsistemas de construção que são inferencialmente incompatíveis entre si.</td><td>Corolário da Sociabilidade:
Na medida em que uma pessoa constrói os processos de construção de outra, ela pode ter um papel em um processo social envolvendo a outra pessoa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Corolário da Experiência:
"O Sistema de Construção de uma pessoa varia quando ela sucessivamente constrói replicas de eventos</td></tr>
</table>

(Fonte: Adaptação de Moreira, 1999)

Quando particularizamos a análise dos corolários de Kelly para seu postulado fundamental, sentimos, ainda mais, o peso da metáfora do homem-cientista em sua teoria. O Corolário da Construção, por exemplo, menciona que as pessoas interpretam a realidade, fazem antecipação, elaboram suas construções mentais dessa realidade, de modo semelhante as abordagens dadas por cientistas em seu processo de investigação. Por sua vez, neste caminhar, cada cientista é único, embora possa compartilhar informações com outros colegas de pesquisa, paralelo para nós evidente com o que propõe o Corolário da Individualidade.

Como modo de aplacar os conflitos que ocorrem nessa construção, as pessoas agrupam seus elementos -os construtos - segundo relações de ordenação ou subordinação (Corolário da Organização), formando um número finito de construções dicotômicas (Corolário da Dicotomia), escolhendo nesta dicotomia, aquele construto com o qual ele antecipa o maior número de eventos, segundo o Corolário da Escolha.

Por outro lado, cada construto tem um “locus” de atuação (Corolário de Âmbito) a cada momento, o sistema de construtos de uma pessoa varia em função de sua permeabilidade (admissão ou não de elementos novos), podendo ser fragmentado em subsistemas incompatíveis entre si (Corolário da Modulação e da Fragmentação).

Os corolários acima apresentados parecem inseridos no contexto da internalidade de cada pessoa. A questão da interação entre pessoas é contemplada nos Corolários da Comunalidade e da Sociabilidade. Em nossa leitura da teoria de Kelly, as considerações sobre aprendizagem humana são melhores referidas quando consideramos o Corolário da Experiência, o qual passamos a destacar.

2.2.3. O Corolário da Experiência

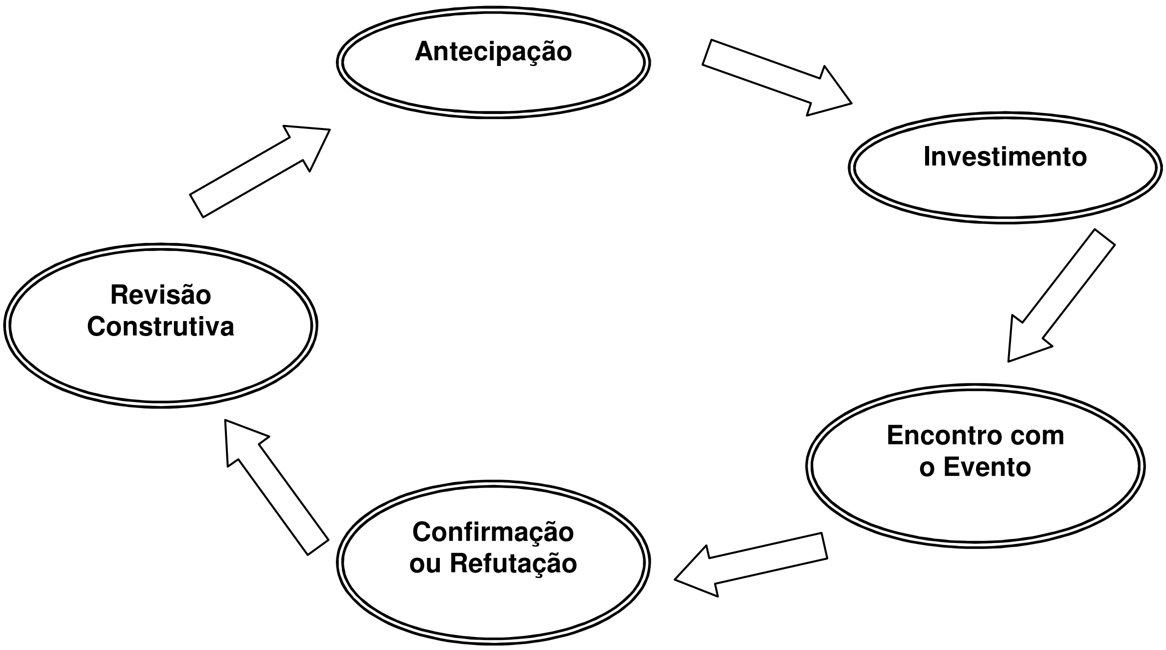
A teoria de Kelly não é, a princípio, voltada para considerações educativas. Ela é uma teoria da personalidade e como tal tem seu foco dirigido para o indivíduo, sua estruturação como pessoa.

A experiência é considerada por seu autor como resultado das sucessivas construções e reconstruções da pessoa, da perturbação de seus sistemas de construtos por essa variação. Essas variações podem dirigir o sistema a uma estabilidade, tornando-o mais resistente a uma modificação ou provocar novas variações no mesmo. Revisando, o corolário da experiência diz que "o sistema de construção de uma pessoa varia quando ela sucessivamente constrói réplicas de eventos" (KELLY, 1975 apud BASTOS, 1992, p. 17. tradução livre).

Ou seja, as pessoas ajustam sua compreensão às realidades na medida de variação de suas experiências. Na concepção kellyana, a aprendizagem ocorre segundo um ciclo, que é determinado por cinco momentos: Antecipação, Investimento, Encontro, Confirmação ou Refutação e Revisão Construtiva.

A metáfora do homem-cientista conduz o conceito de aprendizagem para a noção kellyana de experiência. Esta é estabelecida no Ciclo da Experiência de Kelly, como aparece na figura 4.

Figura 4: Ciclo da Experiência de Kelly



Fonte: Cloniger, 1999

Este ciclo, chamado Ciclo da Experiência Kellyana (CEK), contém a essência da sua teoria, para o conceito de aprendizagem nos moldes construtivistas. Para Kelly "learning is not a special class of psychological processes; it is synonymous with any and all psychological processes. It is not something that happens to a person on occasion. It is what makes him a person in the first place."[4] (KELLY, 1963, p. 75)

Em contraponto,

> By construction of experience we do not necessarily refer to highly verbalized interpretations. We keep reiterating this point. A person may construe his experience with little recourse to words, as, for example, in certain conditioned reflexes. Even those constructions which are symbolized by words are not necessarily similar just because the words are similar. Conversely, two persons may be using essentially the same constructions of their experience, although they express themselves in quite different terms. (KELLY, 1963, p. 92).[5]

Assim, no CEK, inferimos, que a pessoa é aquilo que sua experiência conforma, tomando esta afirmativa, não no sentido determinista, mas no sentido dado pelo Alternativismo Construtivo: em um mundo que está acontecendo o tempo todo nossa experiência é aquela porção dos acontecimentos sobre a qual nos posicionamos, com o objetivo de predizê-los.

Encontramos, pois, no CEK não só o modo como se organiza a experiência, mas como uma diretriz de construção da aprendizagem.

---

[4] "Aprendizagem não é uma classe especial de processos psicológicos; ela é sinônima de cada um e de todos os processos psicológicos. Não é algo que ocorre com a pessoa ocasionalmente, mas o que a torna uma pessoa em primeiro lugar". (Tradução Livre)

[5] Por construção de experiência nós não nos referimos necessariamente a interpretações altamente verbalizadas. Nós continuamos a reiterar esse ponto. Uma pessoa pode construir a sua experiência com pouco recurso a palavras, como, por exemplo, em certos reflexos condicionados. Mesmo aquelas construções que são simbolizadas por palavras não necessariamente similares apenas porque as palavras são semelhantes. Reciprocamente, duas pessoas podem estar usando as mesmas construções de suas experiências, embora, elas se expressem em termos bastante diferentes. (Tradução Livre)

3. METODOLOGIA

Como dissemos no capítulo 1, ao longo de nossa experiência de ensino no Curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE, temos constatado que a organização curricular do Curso de Matemática, em geral, apresenta uma dicotomia quase que completa entre disciplinas de conteúdos específicos em matemática, por um lado, e disciplinas de caráter pedagógico, por outro. De fato, desde nossa formação inicial na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco e durante toda nossa experiência no ensino superior como professor de disciplinas matemáticas em curso de formação de professores, temos observado que departamentos de Matemática e departamentos de Educação funcionam como "loci" detentores de saberes distintos a serem ensinados, na maioria das vezes, sem preocupação integrativa.Uma análise do organograma desse curso (Anexo 1) mostra a ocorrência no geral, dessa dicotomia com a importante exceção do que ocorre com a disciplina Metodologia de Ensino e com as Práticas de Ensino.

Ao que parece, tal situação tem provocado um direcionamento no sentido de transformar a aula expositiva, praticamente, no único modo de ensino das disciplinas de conteúdo específico. Tal tipo de prática ambienta-se no que Mizukami classificou de abordagem tradicional do ensino, em que a ênfase é dada às situações de sala de aula: o professor é um transmissor de conteúdos que devem ser assimilados pelos alunos através de tarefas padronizadas, a transmissão é feita basicamente pela expressão oral e a assimilação é essencialmente imitativa e memorizada (MIZUKAMI, 1986).

Noutra direção, também tentando explicitar as características de tal abordagem, Cunha (1998) fala na pesquisa como "atividades para iniciados, fora do alcance dos alunos de graduação, onde o aparato metodológico e os instrumentos de certeza se sobrepõem à capacidade intelectiva de trabalhar com a dúvida" (p.12).

Por outro lado, no decorrer de nossa prática, como professor de matemática nos ensino Médio e Superior, temos sentido, ainda, a necessidade de incorporar práticas pedagógicas que dessem suporte à construção desse conhecimento por parte de nossos alunos. No que diz respeito àqueles da licenciatura, esse fato parece agregar valores à sua formação, em que pese, observarmos também, opiniões dissonantes de alguns que desejam mais conteúdos matemáticos ministrados em aula.

Nesse contexto, propusemos-nos a investigar o desenvolvimento de um conteúdo específico na Licenciatura em Matemática. Escolhemos para tal, a Análise Combinatória Simples, uma vez que essa teoria, ensinada no segundo ano do Ensino Médio, proporciona uma estrutura formal de simples caracterização e uma ampla possibilidade de contextualização, sendo imprescindível na formação do licenciando, apesar de ser um dos conteúdos em que os alunos têm mais dificuldades de aprendizagem no Ensino Médio.

Como estrutura formal de uma teoria, entendemos aquela proveniente de Euclides e dos matemáticos clássicos gregos, assumida pelos matemáticos em geral e incorporada à escrita matemática dos livros didáticos, que, partindo de certas noções primitivas e conceitos definidos, assume determinados postulados e deduz os chamados teoremas da teoria. No caso da combinatória, uma tal estrutura está resumida, por exemplo, no Quadro 1 da página 27. Assim, sempre que nos referirmos a uma "Teoria Combinatória" ou "Combinatória" estaremos supondo a teoria derivada daquele quadro.

A pesquisa teve, essencialmente, caráter qualitativo, o que permite ao investigador incorporar as questões do significado e da intencionalidade inerentes às relações sociais, como construção significativa (MINAYO, 1998).

Estando nosso objeto de estudo situado na perspectiva da formação do professor, optamos por realizá-la no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, espaço de nossas atividades profissionais, sobre o qual recaem nossas expectativas e motivações para pensar o conhecimento.

O curso mencionado é noturno, organizado em dez períodos letivos, sob regime de crédito, de acordo com o organograma curricular contido no Anexo 1.

Especificamente, o "locus" de realização da pesquisa deu-se no transcorrer das atividades de ensino da disciplina Fundamentos de Matemática, que compõe o 4º período daquela proposta curricular, durante os semestres letivos de 2005.1 e 2005.2.

Tal disciplina contempla, entre outros conteúdos, o sistema dos números naturais, ambiente propício para introdução de questionamentos sobre problemas de contagem e construção de uma Teoria Combinatória. Deste fato, decorreu sua escolha para situarmos o conteúdo da pesquisa.

Esta se realizou em dois momentos com propósitos distintos, mas complementares: no primeiro (2005.1) realizamos um estudo-piloto com a finalidade de observarmos uma prática tradicional do ensino de combinatória em que pretendíamos avaliar se de fato tal prática é de alguma forma responsável pelo “insucesso” dos alunos na resolução de problemas de contagem. No segundo momento (2005.2), observamos uma prática em que os sujeitos foram dirigidos a refletirem sobre o ensino de combinatória, elaborarem um plano de ensino sobre esse conteúdo e apresentarem uma aula sobre ele. Neste segundo momento, a intervenção foi realizada seguindo as etapas do Ciclo da Experiência de Kelly.

Apesar de realizada em dois momentos, a pesquisa não teve a pretensão comparativa e, sim, a intenção de estabelecer, de modo aproximativo e provisório, uma compreensão de seu objeto de estudo.

3.1. O Estudo Piloto: O Primeiro Momento

Uma observação do organograma curricular contido no Anexo 1 mostra que o único pré-requisito para que o licenciando curse a disciplina em pauta é Elementos de Lógica e Teoria dos Conjuntos, de cuja ementa constam assuntos clássicos de matemática elementar, tais como: noções sobre conjuntos, relações, funções, cálculo proposicional e estruturas algébricas elementares. O ponto de vista de abordagem de tais assuntos é aquele considerado por Halmos como ingênuo em sua “Teoria Ingênua dos Conjuntos” (HALMOS, 1982), mas a disciplina é dada no nível do texto de Castruci (1978). Dessa forma, é razoável supor que o licenciando, ao cursar a disciplina pesquisada, tenha conhecimento sobre a linguagem matemática em nível dos significados das definições matemáticas, das relações entre sentenças e seus juízos lógicos, bem como da noção do que seja uma teoria axiomática e de sua importância para o conhecimento matemático. Não se notam, porém, dados que permitam inferir a inclusão do chamado pensamento combinatório no campo de estudos do aluno sujeito de nossa pesquisa, à exceção, talvez, do conhecimento adquirido no Ensino Médio.

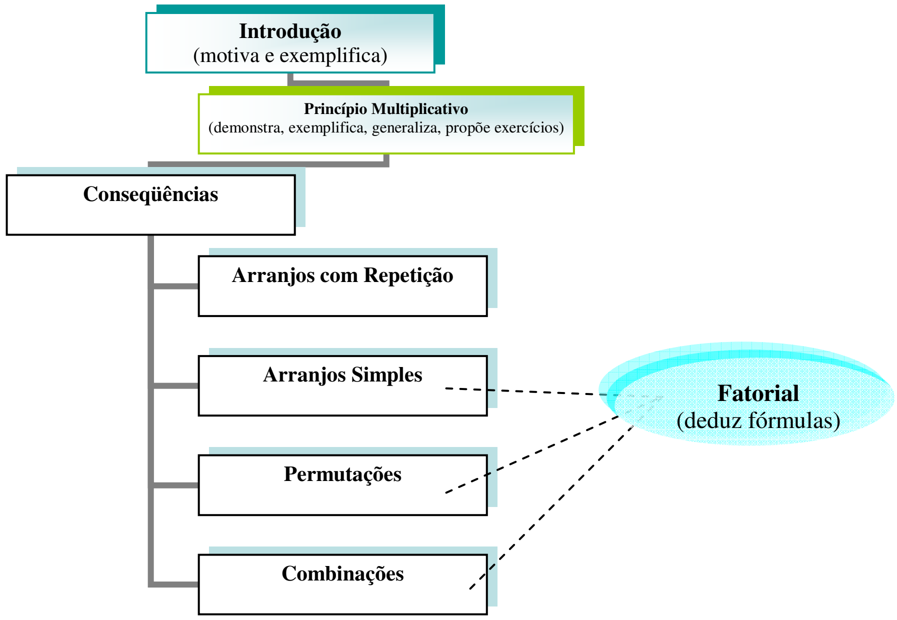
Quanto à disciplina propriamente dita, “Fundamentos da Matemática”, ao longo do tempo ela tem apresentado programação variada. A idéia original quando da implementação do atual currículo é a de que ela oferecesse oportunidade aos licenciandos de abordar temas que dissessem respeito à natureza do conhecimento matemático (Teoria Axiomática, Fundamentos da Aritmética, Construção dos Sistemas Numéricos, Geometrias Não – Euclidianas etc.). Uma outra possibilidade de enfoque para a mesma era o de tratar o conhecimento sobre os números naturais, inclusive do ponto de vista do pensamento combinatório, tão relevante na matemática. Contatamos o professor da disciplina para o semestre 2005.1, no sentido de que fosse esse o enfoque adotado e de que, em um primeiro momento, fosse incluído o conteúdo de estudo para nossa pesquisa. Falamos sobre nossos objetivos, discutimos sobre textos que abordassem a temática tratada, mas não interferimos na sua programação de ensino. Requisitamos apenas dois encontros com a turma para a execução do pré-teste e do pós-teste (Apêndice 1) da intervenção (repassados para o professor) e nossa participação como observador durante as aulas, no que fomos gentilmente atendidos. O quadro 4 abaixo contempla a programação adotada durante a mesma:

Quadro 4: Temas desenvolvidos na pesquisa.

AULAS	TEMA
1 - 2	Pré-teste
3 - 4	Princípio Multiplicativo (PM); Aplicações.
5 - 6	Resolução de Problemas sobre o PM.
7 - 8	Agrupamento Simples: Arranjos; Fatorial; Permutações Simples; Aplicações.
9 - 10	Combinação Simples; Aplicações.
11 - 12	Pós – teste

Um dos textos adotados pelo professor como referência para o curso durante a nossa intervenção, considerado básico para o Ensino Médio foi Hazzan e Iezzi (1993). Elaboramos o esquema, contido na Figura 5, com o objetivo de discriminar o conteúdo de combinatória trabalhado, neste livro, relacionado com esta temática.

Figura 5: Esquema do conteúdo trabalhado



O grupo-classe em um primeiro encontro foi informado pelo professor de nossa pretensão de pesquisa, objetivo e conteúdo a ser trabalhado. Ele era composto de 17 alunos do sexo masculino com idade entre 18 e 27 anos, os quais, aparentemente acataram a idéia. Para análise, escolhemos 10 desses alunos, aqueles que participaram de todo processo da intervenção, à exceção de um que não realizou o pós-teste.

Nosso objetivo geral foi o de analisar a construção do conhecimento de Análise Combinatória Simples por parte de licenciandos em matemática, submetidos a uma prática tradicional desse conteúdo. Nossos objetivos específicos foram:

- Identificar a compreensão dos licenciandos sobre os conceitos de Análise Combinatória Simples;
- Acompanhar o avanço dessa compreensão ao longo de uma prática tradicional de ensino.

Em tais objetivos, o que designamos como compreensão está na direção do que Onuchic (1999) relata como sendo "um processo no qual pode ser aplicado aquilo que previamente havia sido construído" (p. 208). Para tal autora, deveríamos mudar "a visão estreita de que a matemática é apenas uma ferramenta para resolver problemas, para uma visão mais ampla de que a matemática é um caminho de pensar e um organizador de experiência" (p. 208).

A observação da prática pedagógica foi registrada por escrito, com o indicativo do conteúdo trabalhado pelo professor, tempo gasto por ele, sua dinâmica em sala de aula, os questionamentos dos alunos, reações tanto ao modo de trabalho como ao conteúdo em si. Esses dados geraram uma ficha de observação de prática educativa incorporada a nossa análise de resultados no estudo-piloto.

Todos os registros feitos, tanto os provenientes dos alunos quanto os nossos, propiciaram uma exploração inicial, de modo a averiguarmos sua pertinência em relação aos objetivos da pesquisa. Essa exploração inicial nos permitiu determinar aquelas unidades de registros a serem ressaltadas para codificação e seguinte categorização. Isso gerou vários quadros, tomados como resumo de dados, algumas deles submetidos a operações estatísticas simples, as quais foram levadas em consideração apenas no sentido qualitativo da informação que geram.

Complementos a essa metodologia serão indicados ao longo da análise do estudo piloto.

3.2. Intervenção Segundo o Ciclo da Experiência de Kelly: O Segundo Momento

Neste segundo momento, conduzimos uma intervenção em etapas dirigidas pelo Ciclo da Experiência de Kelly (CEK), com o objetivo de obter dos participantes, uma reflexão sobre o ensino bem como o planejamento e a apresentação de uma aula em Análise Combinatória de modo que eles agissem como se professores fossem. Nosso planejamento foi determinado, de modo indireto, pelos resultados obtidos na análise do estudo piloto e pela preocupação de dirigir ações a serem executadas pelos alunos de modo que os permitissem refletir sobre o ato de ensinar aquele conteúdo, planejarem e apresentarem uma aula sobre ele, além de interagirem entre si sobre todo esse processo. As etapas do CEK deveriam ser planejadas nessa direção.

Como mencionamos no capítulo 2, a metáfora do homem-cientista proposta por Kelly, impõe-nos um modo de olhar o processo educativo como um todo uma vez que "o universo está realmente existindo e o homem está gradualmente compreendendo-o", Moreira (1999). Esse fato nos obriga a dirigir nossa ação na pesquisa de modo à constantemente estarmos revendo nossas observações sobre todo o processo.

Ainda mais, a concepção kellyana contra-ataca o determinismo vigente em certas teorias psicológicas de aprendizagem, que põem o homem como refém do meio. Para Kelly, o homem reconstrói sua visão de mundo, em um processo aproximativo de ajustes, segundo moldes (os construtos) hierarquizados e que podem ser compartilhados socialmente. Isto implicou em pensarmos ações para as etapas do Ciclo que permitissem o maior grau de sociabilização possível em cada etapa, privilegiando também a reflexão individual sobre a prática proposta.

Após refletirmos sobre que práticas poderíamos dirigir durante as etapas do CEK, elaboramos o calendário disposto no Quadro 5 abaixo.

Quadro 5. Cronograma da intervenção segundo CEK

DATA	MOMENTOS	ATIVIDADES
06/09	ANTECIPAÇÃO 1	Avaliação escrita, com 5 problemas de combinatória, sendo o primeiro em duas partes
15/09	ANTECIPAÇÃO 2	Apresentação sob forma de conferência de nossa experiência pessoal na temática
20/09	INVESTIMENTO I	Aula tradicional sobre Combinatória, objetivando uniformizar a linguagem.
22/09	INVESTIMENTO II	Leitura e discussão do texto sobre situação didática
04/10	INVESTIMENTO III	Tarefa individual: Categorização de Problemas
25/10	ENCONTRO COM O ACONTECIMENTO	Aula ministrada pela turma, segundo o planejamento elaborado e com interação determinada por critérios próprios.
03/11	CONFIRMAÇÃO OU REFUTAÇÃO	Realização do pós-teste com as mesmas questões do pré-teste.
08/11	REVISÃO CONSTRUTIVA	Desafio: Grupo mestre X Grupo aluno

Uma certa flexibilidade no calendário da intervenção deveu-se à necessidade de adaptarmos as suas atividades ao andamento normal da disciplina e com o tempo necessário para que os alunos desempenhassem as tarefas exigidas no processo.

Os sujeitos da intervenção foram como no estudo-piloto, os alunos da disciplina Fundamentos da Matemática, durante o semestre letivo de 2005.2. A turma era composta de 22 alunos (as), com idade entre 20 e 32 anos e foi submetida, ao longo do semestre, a um conteúdo que, partindo da Axiomática de Peano, descreveu os naturais e em seguida fez a construção formal do anel dos inteiros. O plano de curso da disciplina está configurado no Apêndice 2. Sua ementa esta descrita no Quadro 6 indicado abaixo.

Quadro 6: Ementa da disciplina Fundamentos de Matemática 2005.2

CONTEÚDO	DESCRIÇÃO
Pré-requisitos	Revisão sobre a linguagem dos Conjuntos e do cálculo sentencial elementar. Relações Binárias: Equivalência e Ordem. Funções, conceito e tipologia (injeções e sobrejeções). Funções inversas.
Os Naturais	Descrição de N a partir dos Axiomas de Peano: operações e propriedades. Princípio da Indução Finita. Problemas de Contagem;
Aritmética em N	Teorema Fundamental da Aritmética. Algoritmo Euclideano. Primos, divisibilidade, mdc e mmc. Propriedades
Os Inteiros	Construção formal do Anel dos Inteiros a partir do sistema $(N,+,\cdot)$
Aritmética em Z	Adaptação dos conceitos vistos em N para os Inteiros

Elaboramos o pré-teste (Antecipação 1) de modo que ele não contivesse termos da linguagem comum que permitissem interpretação dúbia, como pares, comissões, agrupamentos etc. Ele foi aplicado sem conhecimento prévio de sua realização, por parte da turma sob o argumento de investigar como ela se encontrava em relação àquele conteúdo tão importante para o ensino. Os resultados obtidos também foram usados para defender a intervenção. Desta forma, foi conduzido o processo de estabelecimento de um contrato pedagógico para a intervenção adequado à pesquisa, até onde podemos perceber. As demais etapas ocorreram segundo a descrição abaixo:

- Antecipação 2: Conferência participativa sobre minha experiência pessoal na aprendizagem e ensino da Combinatória e entrega dos textos para leitura. Tais textos foram o capítulo sobre Situações Didáticas do texto de Freitas (1999), contido no anexo 3, o capítulo 3 da dissertação de Dornelas (2004) sobre o uso do Princípio Multiplicativo na resolução de problemas, o artigo de Loureiro (1997) e os capítulos 22 e 23 da apostila do Projeto Rumo à

Universidade[6] (2005). Devido ao tempo dedicado à intervenção, apenas o texto sobre situações didáticas foi discutido em classe como tarefa da etapa seguinte do CEK, sendo os demais textos considerados alternativos, no sentido de não haver de nossa parte obrigatoriedade de sua discussão;

- Investimento I: aula tradicional sobre aquele conteúdo como modo de uniformizar a linguagem.

- Investimento II: Distribuição e discussão do texto sobre situação didática em sala de aula e sensibilização para a leitura dos textos alternativos.

- Investimento III: Estudos invidualizados sobre associação de problemas combinatórios usando como critério apresentarem mesmo tipo de solução.

- Encontro com o Acontecimento: neste momento deixamos os alunos livres para decidirem o formato em que eles dirigiriam sua ação para ensino daquele conteúdo. A turma seria dividida em dois grupos chamados Grupo Mestre (GM) e Grupo Aluno (GA) em que o primeiro elaboraria uma atividade de ensino para o segundo.

- Confirmação ou Refutação: aplicação das questões do pré-teste como pós-teste.

- Revisão Construtiva: GM e GA ficaram encarregados de elaborarem cada um, uma avaliação objetivando que cada um verificasse a compreensão que o outro tinha do conteúdo trabalhado.

A intervenção ocorreu no momento em que estávamos estudando as conseqüências da axiomática de Peano para os naturais. Nossa intenção pedagógica estava dirigida em estabelecer os contrapontos, “saber matemático x saber pedagógico” , como modo de dirigir o grupo-classe a percepção dessa dicotomia incorporando-a como importante para a sua formação, percebendo que o formalismo matemático é um dos passos finais na construção desse conhecimento e entendendo como diretiva de ensino, a necessidade de tomar o

[6] “Rumo à Universidade” é um projeto criado através da parceria entre a Secretaria de Educação e Cultura de Pernambuco (Seduc-PE) com as universidades públicas do Estado que tem como objetivo aumentar o aprendizado do estudante, auxiliando o seu ingresso à universidade, através de aulas e simulados.

conteúdo a ser ensinado com um olhar para o educando e assumindo o compromisso de se tornarem como que "professores-em-ação".

Em resumo, nosso pressuposto metodológico básico foi de que o formato dado pelo CEK fornecia uma estruturação para que os sujeitos, ambientados segundo suas etapas e com o propósito de refletirem sobre suas ações de ensino, elaborassem um plano de ensino e apresentassem uma aula, agindo como se professores fossem, construindo assim uma aprendizagem significativa sobre resolução de problemas combinatórios. Mais condições sobre os procedimentos metodológicos, desta fase da pesquisa, podem ser encontrados na seção 4.2 desta dissertação, a qual contém a análise dessa fase da pesquisa, com os resultados dela obtidos. Ressaltamos ainda que o caráter qualitativo da pesquisa enfatizou nossa visão do conhecimento, a qual prioriza procedimentos descritivos que, pela sua subjetividade e dinamicidade, produzam uma compreensão contingente e negociada. Neste sentido, os dados quantitativos foram considerados de forma crítica, na direção do que afirmam Bogdan e Biklen (1994):

> "...os investigadores qualitativos dispõem-se à recolha de dados quantitativos de forma critica. Não é que os números por si não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a virar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que os números dizem a cerca das suposições das pessoas que os usam e os copilam" (p. 195).

4. ANÁLISE DE RESULTADOS

Os resultados desta seção estão apresentados em dois subtópicos um considerando o estudo-piloto e outro a intervenção propriamente dita, segundo uso do CEK.

4.1. Análise do Estudo Piloto

A seguir passaremos a análise de resultados do Estudo Piloto.

4.1.1. Pré-teste: considerações e análise preliminar.

Elaboramos o pré-teste considerando como critérios os aspectos abaixo:

• Conhecimentos dos conceitos e resultados dessa teoria (sendo entendido por "conceitos" aqueles primitivos ou definidos e por "resultados" os axiomas ou teoremas das teorias segundo o Quadro 1, p.27);

• Formas de contato do aluno com o conteúdo (ensino médio, cursos pré-vestibulares, através de livros ou curso superior);

• Resolução de cinco problemas de contagem;

Além disso, questionamos, sobre a possibilidade dos sujeitos terem ensinado tal conteúdo, dado ao nosso ver relevante para avaliar os objetivos na pesquisa. A seguir, no Quadro 7, consideraremos os resultados obtidos no pré-teste. Em cada quadro, os sujeitos da pesquisa estão identificados pelas letras A, B, C, ..., J. As questões do pré-teste estão indicadas no Apêndice 1.

Quadro 7: Resultados obtidos na questão 1 do Pré-Teste.

1) Defina ou exemplifique as seguintes noções:

NOÇÃO	RESULTADO POR ALUNO									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
I. Princípio Multiplicativo	N	Ex	R	N	R	N	N	N	N	N
II. Princípio Aditivo	N	N	R	N	N	N	N	N	N	N
III. Arranjos	N	SD	SD	R	N	N	N	R	N	N
IV. Combinações	N	R	SD	R	N	N	N	SD	N	SD
V. Permutações	N	SD	SD	N	N	N	N	N	N	N
VI. Função Injetora	R	R	R	N	SD	Ex	SD	SD	N	R
VII. Função Bijetora	R	R	SD	N	SD	R	SD	SD	N	R

Legenda: **N: Deixou a questão em branco** **SD: Definiu corretamente o conceito**
R: Redigiu texto incorreto sobre o tema **X: Apenas exemplificou**

Escolhemos para noções a serem exploradas na questão 1, aquelas que são básicas em um curso qualquer de Combinatória Simples, com exceção possível dos conceitos de Função Injetora e Função Bijetora, incluídos pela sua evidente relação com as noções de Arranjo e Permutação, respectivamente.

Quadro 8: Resultados Percentuais da questão 1 do Pré –Teste.

NOÇÃO	CATEGORIZAÇÕES			
	N	SD	R	Ex
Princípio Multiplicativo	70%	-	20%	10%
Princípio Aditivo	90%	-	10%	-
Arranjos	60%	20%	20%	-
Combinações	50%	30%	20%	-
Permutações	80%	20%	-	-
Função Injetora	20%	30%	40%	10%
Função Bijetora	20%	40%	40%	-

Legenda: **N: Deixou a questão em branco** **SD: Definiu corretamente o conceito**
R: Redigiu texto incorreto sobre o tema **EX: Apenas exemplificou**

Os resultados obtidos estão descritos no quadro 8 em termos percentuais e apontam na direção de pouco conhecimento das noções básicas da Teoria Combinatória por parte dos sujeitos pesquisados.

A observação do Quadro 8 mostra ausência significativa de descrição dos conceitos ou princípios propostos que são, de fato, a base da combinatória: 70% dos sujeitos nada escreveu sobre o princípio multiplicativo; 90% dos mesmos deixou em branco o enunciado do princípio aditivo.

Em contraponto, "os conceitos formais" da teoria (Arranjos, Combinação, etc...) tiveram maior participação dos alunos na categoria SD (definir o conceito ou enunciar o resultado corretamente).

A questão seguinte investiga a forma de contato dos sujeitos com as noções indicadas na questão 1. Fizemos corresponder a cada termo pesquisado um algarismo romano conforme indicado abaixo:

I = Princípio multiplicativo
II = Princípio aditivo
III = Arranjos
IV = Combinações
V = Permutações
VI = Função Injetora
VII = Função Bijetora

Eis os resultados obtidos (quadro 9):

Quadro 9: Resultados da questão 2 do Pré-Teste:

02) Diga como você tomou contato com as noções acima:

TIPO DE CONTATO	RESULTADO POR ALUNO									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Ensino Médio	VI e VII	Exceto II	Todos	Exceto II	I, II, III e V			III e IV		III, IV, V, VI e VII
Cursos pré-vestibulares			Todos	Exceto II						
Através de Livros		Exceto II	Todos	III e IV	I, II, III e V				III, IV, V VI e VII	
Ensino Superior		Exceto II	Todos					VI e VII		

Legenda:
I = Princípio multiplicativo II = Princípio aditivo III = Arranjos IV = Combinações
V = Permutações VI = Função Injetora VII = Função Bijetora

Em termos percentuais, em relação ao total de alunos considerados obtivemos os resultados indicados no Quadro 10 abaixo indicado:

Quadro 10: Resultados percentuais da questão 2 do Pré-Teste:

TIPO DE CONTATO	NOÇÃO						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Ensino Médio	40%	20%	60%	50%	50%	50%	50%
Cursos pré-vestibulares	20%	10%	20%	20%	20%	20%	20%
Através de Livros	30%	20%	50%	40%	40%	30%	30%
Ensino Superior	20%	10%	20%	20%	20%	30%	30%

Legenda:
I = Princípio multiplicativo II = Princípio aditivo III = Arranjos IV = Combinações
V = Permutações VI = Função Injetora VII = Função Bijetora

Evidentemente, os resultados apresentados por tipo de contato não são disjuntos em cada questão, o que revela a possibilidade de que a mesma questão tenha sido alvo de estudo por parte do sujeito em vários cenários. A opção Ensino Médio é a mais indicada como forma de contato com as noções escolhidas, o que é um fato esperado, uma vez que tal conteúdo faz parte do currículo do Ensino Médio, como já indicamos. A noção que apresenta o menor nível de conhecimento prévio por parte dos alunos é a do princípio aditivo, sendo possível que ocorra seu desconhecimento do ponto de vista de um enunciado formal e não da ação mental que ele propõe, tendo em vista a sua elementaridade. Quando comparamos os resultados nas questões 1 e 2, salta aos olhos a possibilidade de que os sujeitos tenham uma certa resistência a escrever as definições e/ou resultados requeridos na primeira questão, fato que talvez corrobore um certo senso comum de que alunos de matemática “não gostam de escrever”.

Como dissemos, por participarem de um Curso de Licenciatura em Matemática, os sujeitos desta pesquisa poderiam estar ensinando ou terem ensinado os conteúdos assinalados. Nesse sentido, o aluno B revelou ter tido alunos particulares e H indicou ser monitor de Cálculo I na UFRPE e ter ensinado em cursos pré-vestibulares.

A seguir, o pré-teste continha as questões abaixo enumeradas:

> ① Um mágico se apresenta em público vestindo calças e paletó de cores diferentes. Determine o número mínimo de peças (número de calças mais número de paletós) de que ele precisa, para que possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes.
> ②Cinco rapazes e cinco moças devem posar para fotografia, ocupando 5 degraus de escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?
> ③ Um carro de montanha-russa é formado por 10 bancos de dois lugares cada um. De quantas modos dez casais podem sentar-se nesse carro?
> ④ Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2,3,4,6,9.
> ⑤ Dispõe-se de n objetos A e m objetos B para se colocar em duas caixas, de modo que em cada caixa haja, no mínimo , p objetos A e q objetos B ($2p \leq n$ e $2q \leq m$). Determine o número de possibilidades de se fazer a colocação.

A escolha dos problemas foi determinada pelo critério de que sua resolução fizesse uso apenas da idéia de contagem contida na lógica subjacente ao chamado Princípio Multiplicativo. Para a última questão um certo grau de abstração seria requerido. Vejamos os resultados obtidos organizados no Quadro 11:

Quadro 11: Resultados dos Problemas propostos no Pré-Teste.

Problemas	SUJEITOS										% de Resolução
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
①	N	R	R	T	N	N	N	R	T	R	40
②	N	T	T	T	N	N	N	T	T	T	0
③	N	T	R	T	T	N	N	T	T	T	10
④	N	T	T	N	N	N	N	T	T	T	0
⑤	N	T	T	N	N	N	N	T	N	N	0
Tempo gasto	13 min	46 min	60 min	36 min	48 min	9 min	10 min	56 min	71 min	62 min	

LEGENDA: **T: Tentou resolver sem sucesso** **R: Resolveu** **N: Nada escreveu**

Contadas as manipulações de questão (T ou R) em relação ao todo, vê-se que houve 54% de manipulações, destas, apenas 18% corretas, isto é, 1/3 dos alunos que tentaram resolver questões o fizeram corretamente. Em relação ao total de possibilidades, este número cai para 10%. Individualmente, por outro lado, 30% dos sujeitos não manipularam questões.

Caso estivéssemos em uma situação tradicional de verificação de aprendizagem, supondo cada questão com peso dois em uma escala de zero a dez, a distribuição de notas feitas por um professor rigoroso, que computasse apenas certo ou errado seria o indicado no Quadro 12 abaixo:

Quadro 12: Notas Simuladas

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
NOTAS	0,0	2,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	2,0

Assim, por este critério, se nesta avaliação, a média de aprovação fosse cinco, todos os sujeitos pesquisados estariam reprovados!

Um professor de Ensino Médio resolveu os problemas propostos em 15 minutos. Realizamos um teste semelhante com um aluno de Ensino Médio bem treinado nesse conteúdo e obtivemos o tempo de 65 minutos (sem a resolução do último problema). Assim, o tempo dado para resolução do pré-teste (100 minutos) era, na nossa opinião, suficiente, em que pese a sua não utilização pelos sujeitos, integralmente. O maior tempo para a resolução dos problemas foi de 71 minutos (Aluno I).

4.1.2. Acompanhando a Prática Tradicional

A prática educativa teve ocorrência na sala 6 do segundo andar do Centro de Ensino de Graduação (CEGOE) na UFRPE, às terças e quintas-feiras, das 20:10 às 21:40 horas, segundo o calendário discriminado no Quadro 13 abaixo:

Quadro 13: Calendário das Atividades

DATA DE ENCONTRO	ATIVIDADES
15/03/2005	Pré-Teste.
17/03/2005	Princípio Multiplicativo; Exemplos.
22/03/2005	Aplicações do Princípio Multiplicativo.
31/03/2005	Arranjos, Permutações. Fatorial.
05/04/2005	Combinações Simples.
12/04/2005	Pós-Teste

À parte as considerações de ordem ética que nos preocupavam, uma outra tomava corpo em nossa mente: a de elaborar um instrumento de registro das práticas observadas que representasse com exatidão os dados relevantes para nossa pesquisa. Um tal instrumento deveria:

- manter a coerência em cada prática e entre as práticas observadas;
- coletar de modo preciso todos os dados importantes;
- não interferir no trabalho do docente, nem em sua relação com os alunos.

Optamos então, por fazer as anotações tradicionais de sala de aula, demarcando o tempo de distribuição do conteúdo visto e das observações ou questionamentos dos alunos. Isso gerou os quadros 14, 15, 16 e 17, abaixo comentados. Em tais quadros, A, B, C, ..., I, indicam os sujeitos pesquisados e X indica algum dos alunos presentes que faziam parte dos sujeitos pesquisados e que pode ser diferente em cada momento. Os problemas citados nos quadros que contém as fichas de observação podem ser consultados no Anexo 2.

Quadro 14: Ficha de observação de Prática Educativa (1° Encontro)

Aula n°: 3/4 **Data:** 17/03/2005	**Tema:** Princípio Multiplicativo **Número de Alunos Presentes:** 15	
Tempo (min)	**O Professor**	**Os Alunos**
0 – 10	Apresenta-se. Mostra a bibliografia (está com o Plano de Aula na mão). Ressalta a importância da contagem em matemática	Escutam e anotam
10 – 20	Escreve o problema 1 no quadro. Pede sugestão. Escreve solução.	**X** mostra a solução. Demais alunos escutam e anotam.
20 – 30	Enuncia o Princípio Multiplicativo. Comentários: "É bem intuitivo"; "Alguns Problemas exigem bem mais criatividade".	Escutam e anotam
30 – 40	Escreve o problema 2. Pede solução. Resolve o problema no quadro.	Discutem o problema. (**D** apresenta resposta errada). Anotam.
40 – 50	Escreve generalização do Princípio. Propõe problema 3. Comentários: "A escolha da estratégia é importante"; "É melhor primeiro fazer a contagem onde ela é mais difícil ". Resolve.	Parecem interessados. Discutem. Anotam solução.
50 – 60	Propõe problema 4. Espera. Fala sobre a lógica do 'ou'. Escreve solução.	**A** e **B** questionam solução. **B** parece não concordar. Anotam solução.
60 – 90	Escreve problema 5. Incentiva solução, responde questionamento de **B**: "O problema está no Universo dos Inteiros, não podemos aplicar derivada". Sugere o mesmo problema com números maiores. Deduz relação entre médias aritméticas e geométricas. Resolve o problema.	**B** sugere usar derivada. **D** acha que não tem nada a ver. Copiam solução apresentada.
90 – 100	Propõe problemas 6 (Desafio) e 7. Brinca: "vou deixar pouco trabalho pra vocês"	Anotam

Observamos que o professor se relaciona amigavelmente com os alunos, procura motivá-los para que resolvam os problemas propostos, faz uso organizado do quadro e distribui de forma racional o tempo de aula. Os alunos demonstram interesse pela aula, mas apenas **A**, **B**, **D** e **X** têm participação da qual possamos inferir dados sobre a ocorrência de aprendizagem. Não percebemos uma atitude avaliativa do professor nesse último sentido (se houve ocorrência de aprendizagem).

Quadro 15: Ficha de observação de Prática Educativa (2° Encontro)

Aula n°: 5/6		**Tema:** Aplicações do Princípio Multiplicativo
Data: 22/03/2005		
Número de Alunos Presentes: 14		
Tempo (min)	**O Professor**	**Os Alunos**
0 – 30	Questiona os alunos sobre o desafio. Comenta: "O problema não é de Combinatória". Resolve o problema.	Aparentam gostar da solução apresentada. Debatem entre si. Escutam e anotam
30 – 40	Pede solução do problema 7. Anota a solução dada. Complementa	**B**, **D** e **E** apresentam a solução da primeira parte. **X** apresenta solução errada. Anotam solução.
40 – 70	Define conceito de função. Responde pergunta de **A**. Propõe problema 8. Faz simulações com diagramas. Resolve problema no quadro.	**A** pergunta sobre a relação Função x Relação. Acompanham a explicação. Parecem entender. Anotam
70 – 90	Define Função Injetora. Propõe problema 9. Faz diagramas. Deduz solução.	Escutam e anotam.

O professor fala pausadamente, instiga os alunos a pensarem sobre a solução do problema e faz bom uso do quadro. É notável o clima de cordialidade com a turma. Aparentemente, o desafio proposto (problema 6) foi usado no sentido de explicitar o grau de dificuldade que um problema pode vir a ter em contraposição aos problemas até então propostos. Não observamos algum plano de ensino preparado como ocorreu na aula anterior.

Os alunos aparentam uma melhor participação em relação à aula anterior, notadamente no que diz respeito ao desafio proposto. O questionamento de A, revelando uma dúvida sobre um fato elementar, merece ser mencionado.

Quadro 16: Ficha de observação de Prática Educativa (3° Encontro)

Aula n°: 7/8		**Tema:** Agrupamento Simples
Data: 31/03/2005		
Número de Alunos Presentes: 15		
Tempo (min)	**O Professor**	**Os Alunos**
0 – 5	Declara objetivo: "Indicar uma maneira formal de introduzir o tema, mas, que no fundo não passa do bom uso do Princípio Multiplicativo".	Observam.
5 – 15	Questiona sobre se alguém sabe o significado do conceito de Arranjo. Escreve a definição (Como seqüência). Exemplifica (problema 10). Responde questão de **F**. Apresenta notação para o número de Arranjos Simples.	**G** fala em ordem, mas, não define. **F** questiona: "O número de casa que vai fazer o Arranjo é menor que o total?" Escutam e anotam.
15 – 30	Deduz indutivamente a fórmula para $A_{m,r}$. Exemplifica.	Parecem entender a demonstração. Copiam.
30 – 45	Define Fatorial. Reponde a questão de A em termos da fórmula acima. Representa essa em termos de Fatorial.	**A** questiona: "Por que 0! É igual a 1?" Copiam. Parecem entender.
45 – 65	Propõe problema 11. Motiva: "Só se aprende fazendo". Parabeniza $\mathbf{X_i}$. Corrige **A**. Escreva solução.	**X** propõe solução para primeira parte do problema. **A** sugere solução para segunda parte. Copiam.
65 – 75	Questiona: "O que é permutar?" Responde: "É todo arranjo onde r = m" Introduz símbolo e deduz: "$P_m = A_{m,m} = \frac{m!}{0!} = m!$"	Observam e copiam.
75 – 90	Propõe problema 12. Instiga os alunos para que resolvam. Parabeniza **H**. Escreve solução.	Participam da solução (Estão animados). **H** apresentam solução correta.
90 – 100	Propõe 'dever de casa' (Problema 13)	Anotam.

O professor apresenta Plano de Aula, ratifica a idéia de ter um bom domínio do grupo-classe o que, em parte, talvez derive do fato de já ter trabalhado com o mesmo em uma disciplina anterior "Álgebra Linear I" e de sua desenvoltura na técnica de exposição. Novamente, não notamos que haja algum instrumento que permita que o professor infira a aprendizagem do conteúdo trabalhado. Notamos que a declaração do professor no início da aula "no fundo não passa do bom uso do Princípio Multiplicativo", mostra a sua consistência no domínio do contexto de sua parte, uma vez que os argumentos usados para a apresentação das noções de arranjo e permutação são conseqüências naturais do Princípio Multiplicativo.

Quadro 17: Ficha de observação de Prática Educativa (4° Encontro)

Aula n°: 9/10 **Tema:** Combinações Simples

Data: 05/04/2005

Número de Alunos Presentes: 13

Tempo (min)	O Professor	Os Alunos
0 – 10	A turma apresenta um descontentamento geral sobre o assunto trabalhado. **A** comenta ser desestimulante estudar tal conteúdo. O professor aparenta concordar, mas fala sobre o contrato que fora acordado. Fala que há outros temas interessantes a serem estudados: comenta sobre a projeção estereográfica (conteúdo abordado em Variáveis Complexas, disciplina do mestrado).	
10 – 15	Lembra resultados obtidos sobre as fórmulas para cálculo dos números de Arranjos e Permutações Simples.	Prestam atenção.
15 – 30	Questiona sobre a resolução do problema 13. Escreve a solução.	Anotam
30 – 45	Propõe problema 14. Questiona os alunos.	Comentam entre si. Não apresentam solução. **J** tenta explicar sua solução, sem sucesso.
45 – 55	Resolve problema 14.	Copiam.
55 – 75	Propõe o problema 15. Aguarda solução. Complementa a solução de **A**.	**A** esboça início. Copiam.
75 – 90	Propõe o problema 16. Aguarda. Define Permutação Circular. Escreve solução.	Comentam entre si. Copiam. **B**, **F**, **G** retiram-se.
90 – 100	Propõe o problema 17. Define Combinações Simples. A partir de exemplos, deduz fórmula. Exemplifica. (Problema 18).	Copiam. Apresentam-se desestimulados.

Ficamos surpreendidos com as considerações no início da aula, afinal pensávamos ter conseguido por parte do grupo-classe uma aceitação não só da pesquisa por nós empreendida como do conteúdo matemático a ser trabalhado. Notamos uma evidente necessidade por parte de alguns alunos do encerramento dessa intervenção. Ficou ainda clara uma certa aceleração quando da apresentação da noção de Combinação. Mantivemos nossa postura de não intervir e combinamos o pós-teste para o próximo encontro. De todo modo, pensamos em como averiguar a participação dos alunos nos encontros, daí, analisando os conteúdos das fichas de observação, criarmos índices que, de um modo estatisticamente elementar a medissem. Pensamos, pois nos dois índices abaixo descritos:

$$I_1 = \frac{\text{Nº de participações individuais por aula}}{\text{Nº de alunos presentes}}$$

$$I_2 = \frac{\text{Nº de participações individuais por aula}}{\text{Nº total de participações}}$$

Os resultados estão indicados no Quadro 18, em valores aproximados:

Quadro 18: Resultados dos índices observados

ÍNDICES	1º ENCONTRO	2º ENCONTRO	3º ENCONTRO	4º ENCONTRO
$\mathbf{I_1}$	40%	35,7%	42,8%	23%
$\mathbf{I_2}$	30%	25%	30%	15%

A participação por alunos presentes (índice I_1) mostra um fato que é aparentemente corrente na prática tradicional: os alunos quase nunca interagem entre si, sendo poucos aqueles que demonstram um conteúdo questionador diante de um conteúdo trabalhado. Note-se que ambos os índices há uma variação de crescimento mostrando um certo desestimulo quanto à intervenção durante o 4º Encontro. Em conversas com alguns dos sujeitos, observamos alguma necessidade por parte do grupo de “trabalhar conteúdos matemáticos mais relevantes” ou de que aqueles conteúdos eram “chatos”, que aqueles problemas “não tinham nada a ver com a situação real” ou que “eram problemas fantasiosos”.

4.1.3. O Pós-Teste

O Pós-teste foi montado com os cinco problemas indicados no pré-teste e mais o seguinte:

⑥Quantos anagramas da palavra Olinda têm vogais e consoantes se alternando?

Este foi acrescentado em razão de termos observado seu treinamento com certa ênfase nos encontros realizados. Os resultados obtidos encontram-se resumidos no Quadro 19. O sujeito C, por não participar do pós-teste, foi desconsiderado da análise.

Quadro 19: Resultados do Pós-teste em comparação com o Pré-teste durante o Estudo-Piloto

Problemas	**SUJEITOS**																		**%**	
	A		**B**		**D**		**E**		**F**		**G**		**H**		**I**		**J**			
	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
①	**N**	**R**	**R**	**R**	**T**	**R**	**N**	**R**	**N**	**R**	**N**	**R**	**R**	**R**	**T**	**R**	**R**	**N**	**33**	**89**
②	**N**	**T**	**T**	**R**	**T**	**T**	**N**	**T**	**N**	**T**	**N**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**0**	**11**
③	**N**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**N**	**T**	**N**	**R**	**T**	**T**	**T**	**N**	**T**	**T**	**0**	**11**
④	**N**	**N**	**T**	**T**	**N**	**N**	**N**	**R**	**N**	**N**	**N**	**R**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**0**	**22**
⑤	**N**	**N**	**T**	**T**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**T**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**0**	**0**
⑥		**T**		**R**		**T**		**R**		**R**		**R**		**R**		**N**		**R**		**66**
Tempo gasto (min)	**13**	**40**	**46**	**55**	**36**	**50**	**48**	**50**	**9**	**55**	**10**	**50**	**56**	**53**	**71**	**58**	**62**	**52**		

A observação do Quadro 19 nos conduz, em primeiro plano, à conclusão de que no total, o tempo gasto pelo grupo de alunos na resolução do pós-teste foi maior do que aquele usado durante o pré-teste (403 contra 351 minutos) o que explica o aumento do número de manipulações (de 22 para 32) por parte do grupo. Também notamos um crescimento percentual de mais 100% na resolução da questão 1, a mais simples do grupo, e uma boa média na resolução da questão 6 (66%), que como dissemos, consideramos bastante treinada pelo professor durante as aulas. Também não houve vazios de resoluções como no pré-teste onde 30% dos alunos nada responderam. Isto é, aumentou o número de manipulação das questões (de 54% para 80%). Ademais, o percentual de manipulações corretas também aumentou (de 33% para 37%). No mais, não houve avanços consideráveis na resolução das demais questões, a não ser no número de tentativas realizadas.

Como adendo às nossas preocupações na pesquisa, achamos conveniente tentar avaliar as concepções dos sujeitos sobre o conteúdo trabalhado, durante a intervenção. Daí termos solicitado ainda que eles fizessem um pequeno comentário sobre a relevância da

Combinatória para o ensino de matemática em geral, indicando, se possível, a série de ensino em que ela deveria ser incluída. Eis algumas respostas obtidas:
A: "É importante para a solução de problemas que surgem no dia-a-dia. Vale salientar que alguns desses problemas são de natureza mais complexa, exigindo um raciocínio superior".

Esta consideração remete-nos ao uso da matemática como suporte para cidadania.

G: "Deve ser ensinado em um nível mais elementar a partir do momento em que se começa a tabuada de multiplicação, pois desenvolve o raciocínio lógico e fica mais atraente". Nota-se aqui uma preocupação com a matemática em si, seu desenvolvimento interno.

H: "A grande importância desse conteúdo, além do ensino da contagem é o estímulo que provoca na capacidade de abstração do aluno para resolver problemas. Essa capacidade é muito importante para que alunos a partir da sexta série possam imaginar situações do cotidiano matemático".

Como G, H está preocupado com a matemática em si, mais na direção na resolução de problemas.

No Quadro 20, resumimos as concepções dos alunos na direção das falas de A, G e H. Consideramos os seguintes indicadores:

Σ: Resolução dia-a-dia;

Γ: Desenvolve Raciocínio Lógico ou Matemático

Π: Desenvolve o raciocínio para resolver problemas.

No mesmo quadro, indicamos em que nível de ensino o aluno considera onde deveria ser ministrado o conteúdo, se no ensino fundamental ou médio (EF ou EM, respectivamente).

Quadro 20: Concepções dos sujeitos

	A	B	D	E	F	G	H	I	J
CONCEPÇÕES	Σ	Γ	Π	-	Π	Γ	Π	Σ	-
NÍVEL DE ENSINO	_	**EF**	**EM**	**-**	**EM**	**EM**	**EF**	**EF**	**-**

Em termos percentuais, tomando como universo o total de sujeitos, verificamos que a concepção Π (desenvolve raciocínio para resolver problemas) apresenta uma maior freqüência: 33,3% contra 22,2 % de cada uma das outras concepções e 0% não opinaram. Quanto ao nível de ensino, o grupo se distribuiu de modo equivalente: 33,3% para cada nível proposto na pesquisa, sendo que 33,3 % não opinaram.

Tanto com relação ao "tipo de concepção" quanto ao "nível de ensino" houve alguns sujeitos que não se pronunciaram (22,2% e 33,3%, em cada categoria, respectivamente).

4.1.4. Resultados e Discussão

Investigamos durante esta intervenção, uma prática tradicional no ensino de Combinatória para licenciandos em Matemática. O pré-teste realizado buscou detectar o conhecimento prévio dos alunos sobre a teoria abordada e seu uso em problemas aplicados. Ele mostrou que os sujeitos pesquisados tinham dificuldades em definir, ou mesmo exemplificar por escrito, noções básicas sobre tal conteúdo. Por exemplo, apenas 10% deles conseguiu enunciar corretamente o Princípio Multiplicativo ou as noções de Arranjo ou Combinação. (Quadro 8)

A análise da forma de contato (Quadro 10) informa ainda, que foi preponderantemente, no Ensino Médio que eles tomaram conhecimento dessas noções, 40% informaram ter tomado conhecimento do Princípio e 60% da noção de Arranjo nesse nível de ensino. O Ensino Superior, pouco contribuiu nesse sentido, uma vez que exceto H, todos os demais alunos que tomaram conhecimento no ensino superior, já o fizeram antes no Ensino Médio. Tal fato era esperado, visto que a Análise Combinatória, como tratada na pesquisa, é intrinsecamente derivada de uma ampla classe de problemas elementares em matemática, usualmente explorados nos ensinos Fundamental e Médio.

Loureiro (1997) mostra haver um sentido aditivo e um sentido combinatório para a multiplicação e que neste último que se fundamenta a resolução desta classe de problemas. Por outro lado, em sua dissertação de mestrado Dornelas (2004) trabalha a idéia do uso do Princípio Multiplicativo como recurso para o ensino de Combinatória. Para esse autor:

> "... as operações de adição e multiplicação e suas aplicações a situações diversas são subsunsores para informações mais elaboradas... como as dos Princípios Aditivo e Multiplicativo que serão utilizados como ferramentas ou recursos didáticos que habilitarão os alunos a preparar e reelaborar sua estrutura cognitiva para a apreensão de conceitos subjacentes como os de Permutações, Arranjos e Combinações...".
>
> (DORNELAS, 2004. p. 118)

Na mesma direção, pensamos ser a atividade de resolver problemas atrelados ao fazer matemático e que, no caso da Combinatória, não é necessária à formalização de uma teoria matemática para isso. Daí, mesmo considerando que os sujeitos pesquisados tenham se revelado com pouco contato em relação às noções pesquisadas, poderíamos esperar um bom desempenho na resolução dos problemas propostos no pré-teste. Não é, contudo, o que mostram os resultados do Quadro 11 ou as notas simuladas na Quadro 12. Decorre daí que, o pré-teste mostra a necessidade da revisão daquele conteúdo pelo grupo analisado, uma vez que, é conteúdo de ensino de sua vida profissional futura, sendo necessário também, como base do importante raciocínio probabilístico, fundamental em matemática.

Nossa preocupação em não contaminar a pesquisa nos impediu de interferir em seu planejamento pedagógico tomado. Uma escola tradicional do Ensino Médio reserva 14 horas-aula para trabalhar aquele conteúdo, com a inclusão do chamado, Binômio de Newton, duas a mais do que a usada na intervenção pelo professor. Portanto, levando em consideração também, as diferenças de níveis de ensino, achamos que houve uma carga horária adequada às necessidades da intervenção.

Quanto às atividades de sala de aula observamos uma gradação no nível de problemas desenvolvidos (Apêndice 1) e sua adequação aos objetivos declarados pelo docente.

A comparação dos dados obtidos no pré-teste e pós-teste (Quadro 19) nos revela que a exceção do sujeito **J** todos os demais tiveram seu percentual de acertos aumentados, com destaque para **G** que de nenhum acerto passou para quatro. Dentro do pressuposto de estarmos tratando de sujeitos com o perfil de licenciandos em matemática, tendo em vista o total de problemas resolvidos pelo professor em aula, bem como sua didática e envolvimento com a turma, usando um critério tradicional de medida, como a própria nota da universidade, obteríamos a seguinte distribuição de notas (Quadro 21)

Quadro 21: Simulação de notas no pré-teste e pós-teste no Estudo-Piloto:

Sujeitos	Pré-teste	Pós-teste
A	0	1,7
B	2	5,1
D	0	1,7
E	0	3,4
F	0	3,4
G	0	6,8
H	2	3,4
I	0	1,7
J	2	2

No Quadro 11, cada questão resolvida no pré-teste vale 2 pontos e no pós-teste 1,7 pontos. Usando nota cinco, como média de aprovação todos os alunos estariam reprovados no pré-teste e apenas dois (**B** e **G**) seriam aprovados no pós-teste. Em uma outra simulação para o pós-teste, considerando o problema 6 como valendo dois pontos extras, e os demais problemas como valendo dois pontos cada um, apenas os alunos **B**, **E** e **G** obteriam aprovação com medias iguais a 6, 6, e 8 respectivamente. Em qualquer das simulações obteríamos um índice de aprovação relativamente baixo (menos de 50%).

Com o objetivo de verificarmos se a prática adotada ao longo da intervenção fora suficiente para resolução das questões do pós-teste, perguntamos a três professores do Ensino Médio, se eles assim consideravam. Dois destes professores questionaram a abstração exigida no 5º problema, considerando que os demais estavam no "nível" daqueles trabalhados em sala de aula. Uma simulação de notas, com a retirada deste problema do pós-teste e considerando as demais questões com pesos iguais mostram os mesmos resultados, verificados no Quadro 21.

O aumento absoluto no número de questões resolvidas do pré-teste para o pós-teste, (de três para onze, sem considerarmos os dois últimos problemas), mostra um avanço na resolução de problemas por parte do grupo pesquisado. Contudo em termos relativos, seria desejável também um avanço do perfil das notas obtidas para simulações acima.

Em suma, podemos observar que:

- O pré-teste, considerado em si, mostrou a necessidade da intervenção, uma vez que em termos absolutos nenhum dos sujeitos obteria a aprovação em uma prova elaborada por critérios tradicionais;

- A ausência de Combinatória como conteúdo da formação dos licenciandos, indica a necessidade de sua inclusão, de algum modo, nesta formação;

- No decurso das aulas, evidenciamos a competência do docente, seu bom relacionamento com a turma e bom uso dos recursos tradicionais de ensino;

- Houve avanço no desempenho mostrado no pós-teste. Tal avanço, considerado segundo critérios tradicionais de avaliação, é pequeno, visto que o conteúdo trabalhado, será objeto do fazer pedagógico daqueles, futuros professores, além de ser base para a aprendizagem do cálculo das probabilidades, tão importante na formação do matemático;

- A situação de ensino provocada para a intervenção, parece ter interposto uma barreira em sua aceitação, pelo grupo de alunos. As considerações levantadas por alguns alunos de que o assunto é “chato” ou de que “os problemas são fantasiosos” não devem servir de critério indicativo de que os resultados, em termos de notas, obtidos no pós-teste seriam decorrentes do aparente desestímulo desses alunos, uma vez que os mesmos participaram de todo o processo e até mesmo indicaram dados sobre quando o mesmo deveria ser ensinado e apresentaram concepções relevantes sobre esse ensino (Quadro 20).

Tem-se, pois, um conteúdo considerado relevante na formação do professor de Matemática, tradicionalmente considerado problemático para o ensino e para o qual, os licenciandos de Matemática apresentaram fraco desempenho, quando submetidos a uma prática tradicional de ensino. Tais considerações levam-nos a sentir necessidade de novos estudos tanto para investigar a defasagem de compreensão dos licenciandos no conteúdo abordado, como na discriminação de estratégias e procedimentos de ensino.

4.2. Análise da Intervenção Segundo CEK

Quando da aplicação da intervenção segundo o CEK, já estávamos conscientes de sua necessidade e importância uma vez que, a prática tradicional nos mostrara a carência de aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória nos licenciandos e de que o modo de organização do Ciclo da Experiência indicava um formato possível de organizar as ações de modo a permitir maior possibilidade de reflexão por parte dos alunos e maior interação entre eles contemplando o fato de que os conteúdos trabalhados contivessem características mais próximas daquelas contidas na ação docente. Contudo, éramos professor da disciplina onde a intervenção seria realizada, demandando, pois, alguns cuidados. Nesse sentido, munidos de intenção pedagógica colocamos como diretrizes que:

- O conteúdo da disciplina seria trabalhado de modo tradicional até a ocorrência da intervenção, quebrando radicalmente esse contrato quando do início desta, logo após a aula tradicional (Investimento II).

- Sempre que possível questionaríamos o grupo-classe sobre a relevância dos problemas de contagem na matemática e no dia-a-dia e da importância de seu conteúdo para o ensino, da relevância do saber docente e da necessidade da integração conteúdo específico x conteúdo de ensino na formação do professor;

- Informaríamos nosso objetivo, quanto à intervenção, porém não iríamos intervir nas ações do grupo-classe quanto à aprendizagem da resolução de problemas em combinatória;

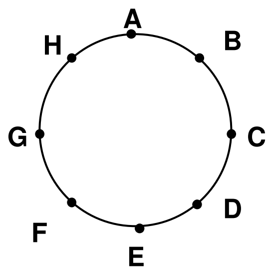
De um modo geral, queríamos assegurar que o grupo-classe incorporasse a temática adotada como importante para a sua formação e assumisse o compromisso de se tornarem como que professores-em-ação. Essa pressuposição, intrínseca ao contrato didático subjacente à intervenção, foi determinante para nossa ação na primeira fase do CEK. O cenário para sua execução, segundo determinado na metodologia, foi aquele fornecido pelo desenrolar do estudo sobre números naturais, em um contexto formal (do ponto de vista do conteúdo) e tradicional (do ponto de vista do ensino). Também, em vários momentos do curso, salientamos a importância da combinatória, tanto interna como externamente à Matemática.

Por outro lado, tínhamos que avaliar o conhecimento inicial dos alunos, fato que passamos a descrever e analisar.

4.2.1. Antecipação (Primeira Parte)

No momento em que decidimos executar o pré-teste, considerado como primeira parte da antecipação, já havíamos trabalhado a construção das operações para os naturais, suas propriedades, e feito uso do princípio de indução como método de prova, em um ambiente suficientemente formal e suficientemente deslocado do que geralmente ocorre em nível elementar e do Ensino Médio. Nossas considerações históricas conduziram, como normalmente ocorre, para o processo de contagem como um dado relevante para o surgimento dessa espécie de número. Aplicamos o pré-teste sem o conhecimento prévio da turma sobre sua realização e com o objetivo declarado de investigarmos como ela se encontrava em relação à combinatória, conteúdo sabidamente ausente de seu currículo na licenciatura, mas muito possivelmente presente como conteúdo de ensino para os futuros professores que dali sairiam.

Abaixo descrevemos os problemas propostos do pré-teste.



1. Dados 8 pontos distintos sobre uma circunferência indique:

a) Quantas retas podem ser traçadas ligando 2 destes pontos?

b) E se os pontos escolhidos não forem consecutivos?

2. Quantos números naturais com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?

3. Quantos subconjuntos com três elementos tem o conjunto {1,2,3,4,5,6,7}?
4. Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?
5. Quantos triângulos podemos formar com 8 pontos distintos do plano sabendo que precisamente três destes pontos estão alinhados ?

Note-se que nos enunciados dos problemas os conceitos usados são relativos a objetos matemáticos, sobre os quais o grupo-classe tem os significados. Esperamos com isso evitar "as chatices" ou as "fantasias" detectadas pelos alunos no estudo-piloto impondo algum grau de necessidade matemática aos problemas propostos.

Participaram do pré-teste 16 alunos dos quais selecionamos sete para análise, nomeados pelas letras A, B, C, D, E, F e G. É importante ressaltar que o critério de escolha dos sujeitos foi o da participação em todas as fases da intervenção. Os resultados obtidos estão indicados abaixo no Quadro 22:

Quadro 22: Resultado do pré-teste da intervenção

Problemas	SUJEITOS							%
	A	B	C	D	E	F	G	
1ª	T	T	T	R	R	T	R	43
1b	T	T	T	R	R	T	R	43
2	T	T	R	R	R	R	R	71
3	T	T	R	T	R	T	R	43
4	T	T	R	R	R	T	R	57
5	N	T	R	T	R	R	R	57
Tempo Gasto	39 min	20 min	38 min	35 min	29 min	29 min	18 min	

LEGENDA: **T** – Tentou resolver sem sucesso **R** – Resolveu **N** – Nada escreveu

Observamos que os alunos E e G, apesar de terem resolvido todas as questões, utilizaram apenas 29 e 18 minutos, respectivamente, e que todos os demais alunos entregaram o pré-teste antes de 40 minutos, o que revela ter sido suficiente o tempo dado para resolvê-lo (1 hora e 40 minutos). Também apenas um aluno deixou um problema sem nada a escrever (A com o problema 5). Quanto à resolução de problemas por aluno, nota-se uma oscilação entre 43% e 71%, assinalando que cada problema foi resolvido por um grupo médio de alunos, ao contrário do que ocorreu com estudo piloto. Podemos considerar, então, que não houve problema considerado difícil para o grupo de alunos pesquisado.

Procuramos, na análise da resolução dos problemas por parte dos alunos, indicadores que servissem para categorizarmos suas estratégias. Observamos quatro deles que passamos a referenciar:

$\alpha \rightarrow$ Usou fórmula de Arranjo

$\gamma \rightarrow$ Usou fórmula de Combinação

$\rho \rightarrow$ Usou fórmula de Permutação (fatorial)

$\eta \rightarrow$ Realizou ou tentou solução heurística com base no Princípio Multiplicativo

O Quadro 23 abaixo resume os resultados obtidos com base nessa categorização:

Quadro 23: Estratégias de Resolução de Problemas por aluno segundo a categorização adotada

Problemas	SUJEITOS						
	A	B	C	D	E	F	G
1a	η	η	ρ	_	η	η	γ
1b	η	η	η	_	η	η	γ
2	ρ	α	_	η	α	η	η
3	ρ	γ	γ	η	γ	γ	γ
4	ρ	γ	_	η	η	η	η
5	_	η	γ	_	γ	γ	γ

LEGENDA:
η: Realizou ou tentou solução heurística com base no Princípio Multiplicativo
α: Usou fórmula de Arranjo
ρ: Usou formula de Permutação (fatorial)
γ: Usou fórmula de Combinação

Note-se que se computarmos o percentual de cada estratégia, em relação ao total de estratégias usadas nas resoluções dos problemas, obtemos 50% para η, 33% para γ, 11% para ρ e 5,5% para α, o que destaca a solução heurística, com o uso do Princípio Multiplicativo, como predominante. Todos os problemas propostos admitem uma solução nesta direção, o que confirma o caráter básico daquele princípio, apontando na direção de sua naturalidade como estratégia de contagem. Dornelas (2004) o sugere como o uso de recurso didático na resolução de problemas de contagem. Loureiro (1997) vai mais além ao caracterizar um sentido combinatório para a multiplicação. Lima, em suas considerações sobre o ensino de combinatória, chega a questionar: “Aliás, para que servem arranjos?” (LIMA et al, 2004, p.112). Entretanto, com exceção do sujeito D todos os demais fizeram a utilização das fórmulas usuais de arranjos, combinações ou permutações, o que demonstram uma certa carga desses conceitos para o ensino da resolução de problemas de combinatória.

Como modo de observarmos o sucesso ou erro da estratégia organizamos o Quadro 24. Nele, para cada problema para o qual uma dada estratégia foi usada, indicamos o percentual de sucesso (certo) ou fracasso (errado) obtido, em relação ao total de alunos pesquisados.

Quadro 24: Percentual de acerto ou erro por questão segundo estratégia adotada.

INDICADORES DE RESOLUÇÃO	PROBLEMAS											
	1a		1b		2		3		4		5	
	CERTO	ERRADO	CERTO	ERRADO	CERTO	ERRADO	CERTO	ERRADO	CERTO	ERRADO	CERTO	ERRADO
α	0%	0%	0%	0%	14,2%	14,2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
γ	14,2%	0%	14,2%	0%	0%	0%	0%	71,4%	0%	14,2%	57%	0%
ρ	0%	14,2%	0%	0%	0%	14,2%	0%	14,2%	0%	14,2%	0%	0%
η	14,2%	42,8%	14,2%	57%	42,8%	0%	0%	14,2%	42,8%	14,2%	0%	14,2%

LEGENDA:
η: Realizou ou tentou solução heurística com base no Princípio Multiplicativo
α: Usou fórmula de Arranjo
ρ: Usou formula de Permutação (fatorial)
γ: Usou fórmula de Combinação

Nosso olhar agora se volta para o fato de que o melhor índice de acerto por questão e estratégia escolhidas é 57% para a questão 5 com a estratégia γ seguido de 42,8% para as questões 2 e 4 que utilizam a estratégia η. O modo heurístico de resolução de problemas é, de acordo com esse critério, o segundo a apresentar melhores resultados percentuais. Note-se que a análise acima não se preocupou em caracterizar se cada problema tinha ou tem alguma estratégia preferencial de resolução.

4.2.2. Antecipação (Segunda Parte)

Em sua metáfora do homem-cientista, Kelly (1963) propõe que as pessoas desenvolvem hipóteses as quais validam ou não suas construções mentais. Não há, para ele, força motivadora nesse processo, sendo relevante apenas o modo como elas antecipam eventos (Postulado Fundamental). Em seu Corolário da Experiência, ele impõe relevância na construção de réplica dos eventos para que as pessoas variem seus sistemas de construtos, de onde, de um ponto de vista educacional, surgiria a aprendizagem. Na primeira fase do CEK as pessoas geram expectativas acerca dos eventos e levantam hipóteses a eles relacionadas. Daí, termos dirigido nossa intenção pedagógica nessa ocasião, para construir atividades que provocassem nos sujeitos expectativas sobre o ensino-aprendizagem da Combinatória.

Organizamos, então, uma apresentação de nossa experiência pessoal de ensino, enfocando nossas dificuldades iniciais naquele conteúdo, uma vez que não o tínhamos visto nos anos de ensino médio, nem em nossa formação na universidade. Indicamos ainda, as perspectivas para o seu desenvolvimento enquanto teoria matemática, sua relevância para o ensino, história e o modo como ele vem sendo ensinado. Fizemos isso nos moldes de uma aula estilo conferência participativa em 15/09/2005. Nessa ocasião provocamos os alunos para que relatassem suas experiências sobre o tema, havendo como que uma concordância geral sobre sua importância para o ensino. Alguns alunos, contudo, reclamaram de falta de interação dele com outros meios de ensino, sendo sugerido, por exemplo, o uso do computador.

Ao final, colocamos nossa idéia de realizar uma intervenção em sala voltada para o ensino de combinatória, em que a turma simularia uma situação de ensino, elaborando um plano de ensino e apresentando uma aula sobre esse conteúdo, procedendo como se os alunos fossem professores-em-ação. Nossa atuação seria de supervisores do processo. Esclarecemos que não haveria prejuízo para o conteúdo da disciplina, pois, de qualquer forma, já havíamos previsto o ensino daquele conteúdo em nosso plano de curso. Passamos uma ata solicitando uma confirmação ou não daqueles alunos interessados em participar do evento. Estavam presentes 22 alunos e todos concordaram com a idéia. Finalizamos distribuindo os textos previstos em nossa metodologia, destacando a importância da leitura do artigo sobre situações didáticas (FREITAS, 1999). Com isso enfatizávamos nossa preocupação de que deveríamos impor ao grupo alguma possibilidade de discutir a didática tomando como referencial a Teoria das Situações Didáticas (TSD) elaborada por Brousseau (1997).

4.2.3. Investimento

A abordagem kelliana nega a aceitação do determinismo, muitas vezes presente nas teorias psicológicas de aprendizagem. O sujeito compreende o mundo de diversas maneiras, não precisando ser refém das circunstâncias (KELLY, 1963), decorrendo daí que, no processo de ensino, o embasamento fornecido ao estudante para suas antecipações passa a ser um dado extremamente relevante. Nos termos do CEK devemos considerar a fase de investimento como o momento para que os alunos fundamentem suas construções. De nossa perspectiva e de acordo com a metodologia adotada consideramos como relevante para essa fase:

- Realizar uma apresentação sobre combinatória como modo de uniformizar a linguagem matemática dos alunos e fornecer um roteiro de conteúdos a serem possivelmente trabalhados fatos ocorridos em 20/09/2005. Na ocasião salientamos o formalismo daquele conteúdo mostrando que sua essência estava no Princípio Multiplicativo de onde derivava as demonstrações das fórmulas de Arranjo, Combinação e Permutação. Reforçamos ainda, as leituras dos textos alternativos distribuídos com a turma (capítulo 3 da dissertação de Dornelas (2004) e o artigo de Loureiro (1997) sobre os sentidos da multiplicação).

- Discutir o texto fornecido sobre situações didáticas, situando-o nos termos da TSD e relacionando-o com a proposta de intervenção (22/09/2005). Consideramos esta fase do investimento muito importante por acharmos nela uma possibilidade da ruptura do contrato tradicional que o ambiente da disciplina proporcionava.

- Cobrar resolução dos exercícios propostos na apostila do Rumo à Universidade 2005.

Passemos à análise dos fatos relacionados com estes momentos.

O panorama proposto para investigação pressupunha que a intervenção efetuada se encontrasse inserida numa abordagem tradicionalista de ensino para a disciplina (MYZUKAMI, 1986). Logo após o início da intervenção, houve como que uma ruptura intencional do contrato didático na disciplina sob nossa orientação, de modo a propiciar que os sujeitos pesquisados construíssem o novo saber a partir do formato adotado para isso: o uso do CEK como modo de propiciar aos alunos possibilidades de reflexão sobre o ato de ensinar aquele conteúdo, interação entre os membros do grupo sobre os significados do ato de ensinar, bem como a elaboração e apresentação de uma aula sobre o mesmo.

Por outro lado, a análise do quadro de indicadores de resolução do pré-teste mostra que a quase totalidade dos sujeitos pesquisados apresenta aqueles indicadores de solução mais reforçados no ensino médio (α, γ e ρ) para a solução de problemas combinatórios. O sujeito D não apresentou essa indicação, mas resolveu 60% das questões propostas. Esses fatos confirmaram que os alunos apresentavam conhecimento prévio sobre a simbologia usada para a combinatória no ensino médio. Para unificar tal linguagem ministramos uma aula expositiva, de conteúdo formal e sem resolução de problemas naquele conteúdo. A dinâmica da aula está resumida no Quadro 25.

Quadro 25. Aula expositiva ocorrida em 20/09/2005

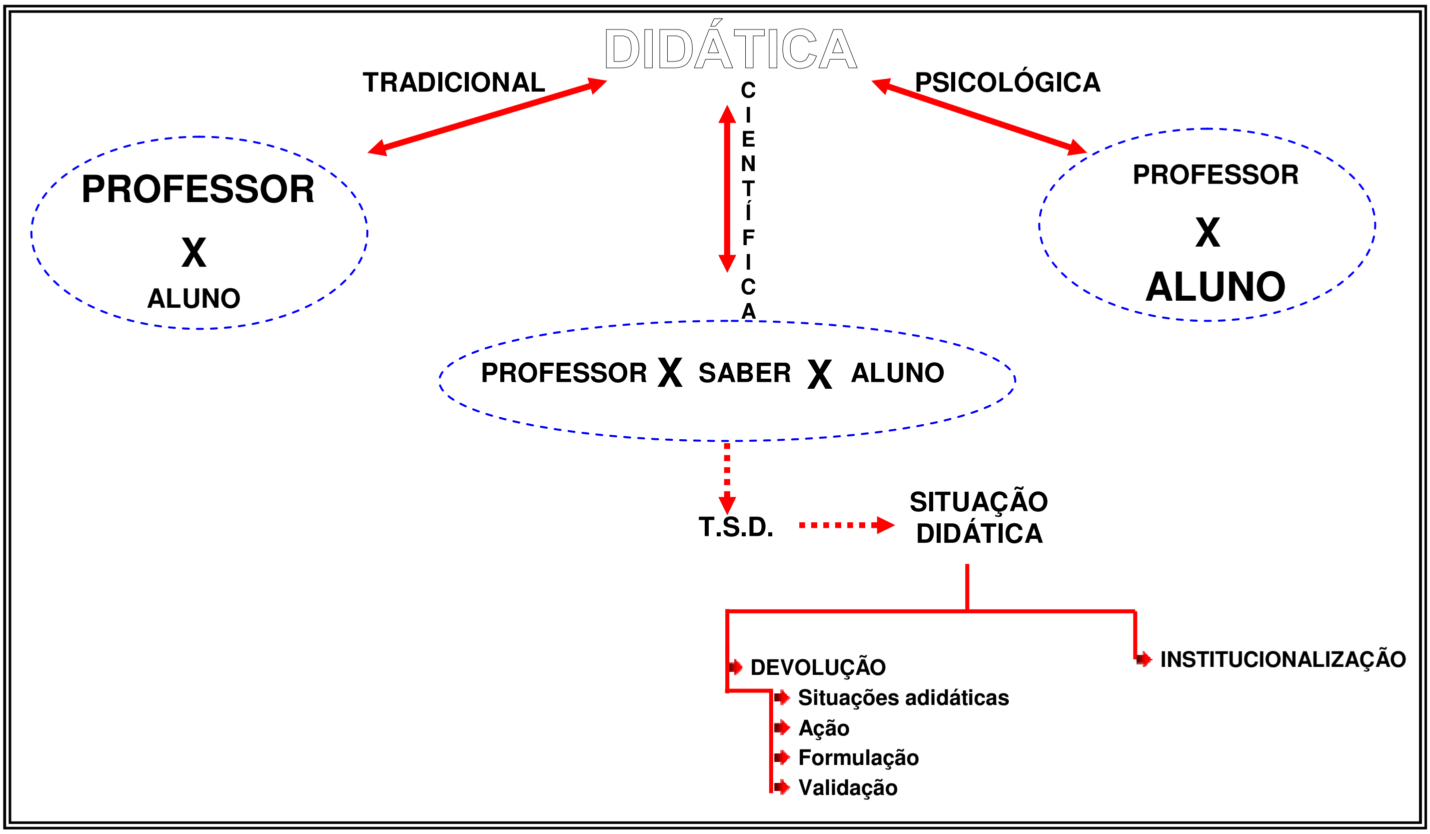
Número de Alunos Presentes: 16		
Tempo (min)	**O Professor Pesquisador**	**Os Alunos**
0 - 5	Fala sobre a importância de uma certa uniformização de linguagem. Diz que vai ser formal e breve.	Escutam e anotam
5 - 15	Enuncia o Princípio multiplicativo. Exemplifica. Faz a árvore das possibilidades. Generaliza. Lembra: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ para A e B conjunto finitos e disjuntos.	Escutam e anotam
15 – 35	Define Arranjos simples como seqüência finita. Introduz notação A_n^p. Deduz fórmula.	Escutam e anotam
35 – 55	Define Combinações simples como conjuntos. Introduz notação C_n^p. Deduz fórmula. Distingue "seqüência" de "conjunto".	Escutam e anotam. B questiona: "Na combinação ordem é importante?"
55 – 65	Deduz fórmula do Binômio $(x+a)^n$. Exemplifica. (Deduz $C_n^p = C_n^{n-p}$)	Escutam e anotam
65 – 70	Questiona: "Pode-se usar esse nível de formalismo no Ensino Médio?" Escuta os alunos. Cobra texto sobre T.S.D. para próxima aula. Encerra a aula.	A responde: "Não" G diz: "Numa turma muito boa". Demais alunos, escutam e anotam.

Durante a exposição, com exceção do exemplo motivador do Princípio Multiplicativo, não foram resolvidos problemas de contagem. Tal tarefa foi confiada aos alunos, com a resolução dos problemas propostos nos textos distribuídos. Salientamos a pergunta clássica sobre ordem feita por B, que propicia a dicotomização Arranjos X Combinação, bem como a completa ausência de participação do resto da turma no sentido de questionar os conceitos e resultados vistos ou o processo de ensino elaborado.

O encontro seguinte (22/09/2005) contou com a presença de todos os alunos. Nele, organizamos a turma em círculo e após fazermos considerações gerais sobre a importância de uma teoria didática para o ensino de matemática caracterizamos a T.S.D. e passamos a discutir o texto sobre situações didáticas (FREITAS, 1999), a partir de uma leitura comentada com revezamento de leitor e freqüentes esclarecimentos dos termos e raciocínios usados pelo autor. Foram levantadas questões sobre a dificuldade de utilização da teoria por conta dos condicionantes externos ao processo de ensino (turmas grandes, excesso de carga horária, baixos salários). Replicamos com o argumento de que a existência de qualquer teoria científica não implica em um uso social imediato dela, mas sua inexistência implica na impossibilidade das mudanças possíveis por ela demandadas.

Organizamos no quadro negro um mapa conceitual sobre como poderíamos pensar a didática naquele momento e pedimos para que eles tentassem fazer o mesmo com a Combinatória. Nessa ocasião reforçamos as considerações de que, como professores de matemática, tínhamos de pensar a didática como uma atividade científica em que o saber matemático inclui-se como determinante no processo (CHEVALLARD et al, 2001). Esclarecemos ainda que, naquele momento, estávamos fazendo o que Brousseau caracteriza como devolução, conduzindo-os para uma situação adidática, no que diz respeito ao ensino de Combinatória. Destacamos, então, as considerações feitas sobre a metodologia do ensino contidas no texto, em que se contrapõe o método socrático ao tradicional de ensino e como a abordagem construtivista se relaciona com a técnica do grande filósofo grego. Ratificamos naquela ocasião que “o trabalho docente sendo uma atividade intencional e planejada requer estruturação e organização a fim de que sejam atingidos os objetivos de ensino” (LIBÂNEO, 1994). Abaixo apresentamos o mapa conceitual descrito em sala.

Figura 6: Mapa Conceitual Visto no Segundo Encontro do Investimento.



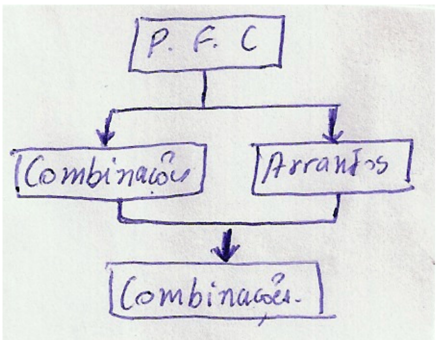
Contudo, não havíamos previsto em nossa metodologia a solicitação de mapas conceituais de combinatória como tarefa, introduzindo isso fora de nossa intenção pedagógica inicial e precisávamos considerar o que disso decorria para nossa investigação.

Ausubel (1978) pressupõe em sua teoria da aprendizagem significativa a utilização de organizadores prévios para dirigir e/ou consolidar as estruturas cognitivas do aluno, propondo sua participação ativa e sua reelaboração pessoal do conhecimento em cada etapa do processo de ensino. Logo, em sua ação pedagógica, o professor deve dedicar atenção especial na elaboração de tais organizadores.

As considerações acima nos remetem à necessidade de formulação de uma teoria da instrução que apóie a confecção de atividades para aprendizes, propulsoras dessa auto-estruturação do conhecimento. Novak e Gowin (1988), por exemplo, propõem, entre outras atividades, a elaboração de mapas conceituais por parte dos alunos como modo de visualizar os conceitos e suas relações e dirigirem a atenção dos alunos para um número reduzido de idéias relevantes, delineando, assim, um caminho de aprendizagem.

Obtivemos mapas conceituais sobre combinatória elaborados por três dos sete sujeitos participantes da pesquisa. A seguir, indicamo-los como fragmentos de protocolo, enfocando nossa percepção sobre os mesmos.

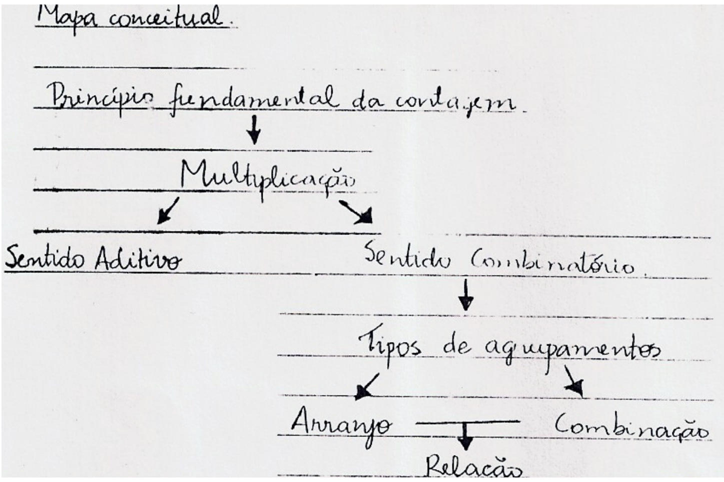
Figura 7: Fragmentos de Protocolo 1 (Mapa Conceitual do Aluno B)



Legenda:
P.F.C. = Princípio Fundamental da Contagem (outra forma de se referir ao Princípio Multiplicativo)

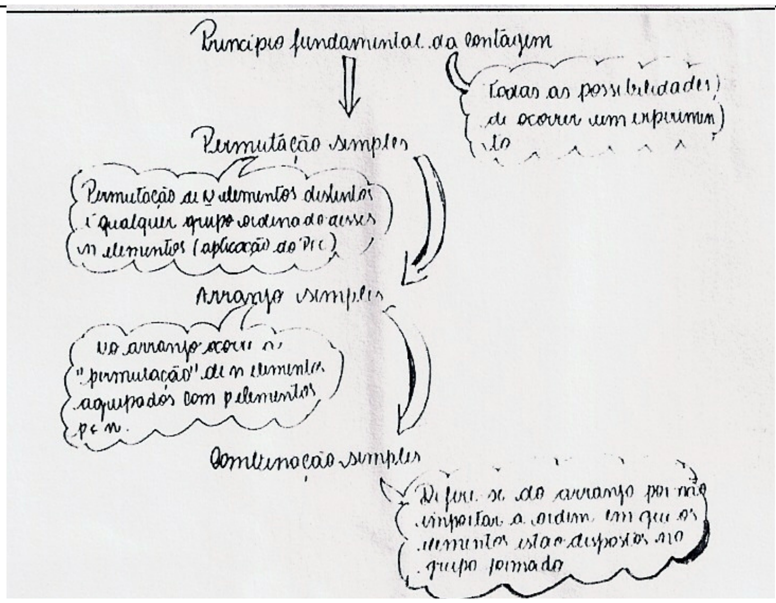
Observamos na Figura 7 uma hierarquia de conceitos bem simples, sem correlação com as proposições que os relacionam e submetendo a noção de Combinação às noções de Arranjo e Combinação, o que parece indicar uma concepção equivocada do aluno. Em conversa com o mesmo, ele me disse ter pensado colocar ao lado do conceito de arranjo no mapa o conceito de permutação em vez de combinação. Deduz-se daí o uso acentuado que ele faz do princípio multiplicativo na obtenção das fórmulas para arranjo e permutação.

Figura 8: Fragmentos de Protocolo 2 (Mapa Conceitual do Aluno A)



Tem-se neste mapa (Figura 8) uma hierarquização que poderemos considerar tradicional para os conceitos de Combinatória trabalhados na intervenção, partindo do geral para o específico. Não se infere, porém que o aluno saiba fazer a discriminação entre eles. A influência do texto de Loureiro (1997) é sentida no modo dele conceber a multiplicação, mostrando que o aluno fez a leitura desse texto, considerado alternativo em nossa proposta.

Figura 9: Fragmentos de Protocolo 3 (Mapa Conceitual do Aluno C)



A hierarquia proposta também parece indicar uma seqüência tradicional do ensino, de acordo com os textos didáticos em geral. Os registros de contextos sobre os conceitos, também indicados no mapa, mostram ainda essa tradicionalidade para o ensino desse conteúdo. Porém, com o mapa o aluno parece demonstrar um melhor domínio de Combinatória, no sentido de seus conteúdos.

Observe-se que nos três mapas apresentados o princípio multiplicativo é tomado como base de onde se enraízam os demais conceitos considerados pelos alunos. Um questionamento que deriva desta observação é se eles concluem daí a possibilidade de resolverem os problemas de contagem sem o uso das fórmulas tradicionais de arranjo, combinação e permutação.

Como tarefa para a terceira etapa do investimento, escolhemos uma que nos permitisse investigar os conhecimentos prévios dos sujeitos quanto às suas formas de categorizar as estratégias para a resolução de problemas combinatórios. Propusemos, então, que associassem dentre um grupo de dez problemas, aqueles que considerassem como tendo o mesmo tipo de solução. Pedimos ainda que justificassem a associação feita, explicando que as categorias obtidas não precisavam ser disjuntas (um mesmo problema poderia constar em duas ou mais associações).

Os problemas propostos foram:

a) Num universo de 500 pessoas, 300 assinam o jornal A e 250 assinam o jornal B. Qual o número de pessoas que assinam ambos os jornais, se 50 pessoas entre elas não assinam os jornais?

b) Quantos números de 5 algarismos podemos formar com os algarismos 1,2,3,4 e 5? (Números Naturais)

c) Tenho 6 livros A, B, C, D, E e F, e quero empacotá-los dois a dois. Quantos são os pacotes possíveis?

d) Tenho 6 frutas distintas e quero fazer sucos com duas frutas diferentes. Quantos sucos distintos são possíveis?

e) Tenho duas empresas de ônibus ligando Recife a Caruaru. A empresa A tem 5 ônibus e a empresa B tem 4 ônibus. Usando ônibus distintos quantas são as formas de ir a Caruaru?

f) Quantos anagramas podemos formar com a palavra OLINDA?

g) Quantos números naturais de 5 algarismos distintos posso formar, usando apenas os algarismos ímpares?

h) Com os algarismos de 1 a 9, quantos números naturais de três algarismos distintos podemos formar?

i) Marcando-se 8 pontos distintos em um círculo, quantos triângulos posso formar com os vértices nesses pontos?

> j) De 25 alunos de uma classe quero formar comissões com 3 alunos onde 1 é presidente, 1 secretário e o outro tesoureiro. Quantas comissões posso fazer?

Note-se que tais problemas contêm conceitos da linguagem coloquial, ao contrário daqueles cobrados no pré-teste. Com isso, se aparentemente estávamos propondo um certo retorno aos problemas “chatos”, no sentido referenciado por alguns alunos do pré-teste, por outro lado, pretendíamos também inserir o contexto corrente nos livros didáticos sobre combinatória impondo aos alunos uma situação próxima da realidade vivenciada pelos professores desse conteúdo. Gargalho & Cánovas (in Minguet, 1998, p.169) citam que “deve formular-se a apresentação destas situações-problema como objetivo para ativação dos conhecimentos prévios que estão relacionados com o conteúdo conceitual das atividades de ensino-aprendizagem empreendidas”.

Como atividade de ensino-aprendizagem, pressupomos aquela desenvolvida no contexto dado. Em decorrência, de acordo com a hipótese de nossa pesquisa, esperávamos uma aprendizagem significativa na resolução de problemas combinatórios. No caso, estávamos propondo àqueles professores-em-ação (metáfora para sujeitos da pesquisa), uma tarefa de organização do saber a ser ensinado sem indicar critérios para isso.

A categorização dos problemas exigida sabemos ser um problema difícil até mesmo para professores experientes no conteúdo de ensino proposto. Entretanto, pensar sobre este tipo de situação é mais uma forma para que os alunos reflitam sobre a sua ação oferecendo diretrizes para que eles, incorporando as funções de professores, organizem suas situações de ensino. Essa é uma constatação em nossa experiência docente.

Vê – se pelo quadro 26 que os resultados obtidos nessa categorização mostram que a maior parte dos alunos (85,7%) determinou categorias disjuntas para as estratégias, fazendo verdadeiras partições do conjunto de problemas propostos. Um único aluno (G) que incluiu um elo de ligação entre grupos de categorias diferentes.

Quanto à justificativa dada para a categorização realizada, notamos o uso de termos matemáticos comuns, que consideramos como indicadores das categorias. Tais termos foram: Arranjos, Combinações, Permutações, Princípio Multiplicativo, Soma, Conjunto e Contagem Simples. Uma análise mais detalhada conduziu-nos à consideração que os últimos quatro indicadores compunham uma estratégia de solução que denominamos heurística, com o uso do Princípio Multiplicativo, ou heurística com a idéia de soma. Daí, apropriando-nos da nomenclatura usada na etapa anterior da pesquisa, consideramos os seguintes grupos de indicadores para a categorização realizada pelos alunos:

$\alpha \rightarrow$ Arranjo　　　　$\eta \rightarrow$ Heurística com uso do Princípio Multiplicativo

$\gamma \rightarrow$ Combinação　　　　$\sigma \rightarrow$ Heurística com a idéia de Soma

De posse dessa notação, resumimos os resultados obtidos no Quadro 26 mostrado a seguir:

Quadro 26: Inventário dos resultados obtidos na terceira etapa do investimento

SUJEITOS	CATEGORIAS /INDICADOR				
A	$\frac{\{c,d,i\}}{\gamma}$	$\frac{\{f,g,h,j\}}{\alpha}$	$\frac{\{b,e\}}{\eta}$	$\frac{\{a\}}{\sigma}$	
B	$\frac{\{c,d,i\}}{\gamma}$	$\frac{\{f,g\}}{\rho}$	$\frac{\{h,j\}}{\alpha}$	$\frac{\{a,e\}}{\sigma}$	$\frac{\{b\}}{\eta}$
C	$\frac{\{c,d,i\}}{\gamma}$	$\frac{\{f,g\}}{\rho}$	$\frac{\{h,j\}}{\alpha}$	$\frac{\{a,e\}}{\sigma}$	$\frac{\{b\}}{\eta}$
D	$\frac{\{c,d,i\}}{\gamma}$	$\frac{\{f,g,h,j\}}{\alpha}$	$\frac{\{b,e\}}{\eta}$	$\frac{\{a\}}{\sigma}$	
E	$\frac{\{c,d,i\}}{\gamma}$	$\frac{\{f,g,h,j\}}{\alpha}$	$\frac{\{b,e\}}{\eta}$	$\frac{\{a\}}{\sigma}$	
F	$\frac{\{c,d,i\}}{\gamma}$	$\frac{\{f,g\}}{\rho}$	$\frac{\{b,e\}}{\eta}$	$\frac{\{h,j\}}{\alpha}$	$\frac{\{a\}}{\eta}$
G	$\frac{\{c,d,i\}}{\gamma}$	$\frac{\{g,h,j\}}{\alpha}$	$\frac{\{b,f\}}{\rho}$	$\frac{\{b,c,d,e,f,g,h,j\}}{\eta}$	

LEGENDA:
η: Heurística com uso do Princípio Multiplicativo　　　　α: Arranjo
ρ: Permutação (fatorial)　　　　$\sigma \rightarrow$ Heurística com a idéia de Soma
γ: Combinação

A freqüência do uso dos indicadores é, em relação ao total de indicação, de 22,5% para α, de 22,5% para γ, de 26% para η, de 16% para σ e de 13% para ρ. Novamente, estamos observando a freqüência de uso dos indicadores em relação ao todo, sem considerarmos a questão da pertinência ou não da estratégia indicada para o problema.

Observamos como dados relevantes para nossa pesquisa que:

- Todos os sujeitos categorizavam os problemas c, d e i segundo o mesmo indicador γ;

- Apenas o sujeito G não fez uma categorização disjuntiva;

- G também foi o único sujeito a não categorizar um problema (o problema a);

- O problema e foi considerado como tendo solução pelo uso do princípio multiplicativo por 71% dos sujeitos e apenas B e C indicaram a estratégia elementar (soma) para resolvê-lo;

Encerramos a aula negociando com os alunos a próxima fase da intervenção: o "Encontro com o acontecimento". Após várias colocações, ficou decidida a formação de dois grupos de alunos, cuja composição seria indicada por eles. Um dos grupos seria responsável por ministrar uma aula, com seqüência didática por ele determinada. O outro grupo interviria como estudantes, os quais, queríamos que agissem como alunos-em-ação, participando ativamente da aula.

Como motivação dissemos que iríamos filmar o acontecimento e que, após análise liberaríamos o material para gravação pelos interessados.

4.2.4. Encontro com o Acontecimento

Os construtos de uma pessoa são considerados, na abordagem kellyana, como hipóteses de trabalho as quais, em um processo de revisão, sempre estão em confronto com suas experiências. Gargalho & Conovas (in Minguet, 1998, p.54) propõem ser a própria experiência "conformada por construções sucessivas de acontecimentos".

Na terceira etapa do CEK, o indivíduo é levado a construir réplicas dos eventos, possibilitando ou não sua validação pelas suas estruturas internas de cognição.

Na intervenção proposta em nosso estudo, esta etapa do ciclo já havia sido deflagrada quando solicitamos aos sujeitos que confeccionassem uma seqüência de ensino para a combinatória. Fazia-se necessário construirmos critérios de análise para as seqüências apresentadas.

Por outro lado, embora o tempo destinado à intervenção não nos permitisse delinear para os alunos, os condicionantes de uma teoria elaborativa para o ensino, deveríamos construir critérios de análise para os planos de aula apresentados. Como eixo norteador, consideramos:

- A existência de caracteres inclusores do conteúdo (tipo partir do geral para o particular ou do mais fácil para o mais difícil);

- O formalismo da proposta em contraposição a uma idéia contextualizada para ele.

Elaboramos então as seguintes questões cujas respostas, foram analisadas apenas em termos de sim ou não:

A seqüência:

I. considera a contagem associada a idéia de adição no ensino fundamental como link ou pré-requisito para trabalhar o conteúdo?
II. menciona a possibilidade do uso do princípio multiplicativo como técnica de contagem no sentido proposto por Dornelas (2004)?
III. faz referências aos "sentidos da multiplicação" conforme Loureiro (1997)?
IV. propõe o método socrático de ensino ou faz considerações sobre aprendizagem significativa ou construção do conhecimento?
V. contempla a contextualização do saber a ser ensinado?
VI. contempla idéias como dedução de fórmulas ou provas de teoremas, dirigindo-se para o que chamamos formalismo?
VII. propõe dinâmicas diferentes da aula expositiva como método de ensino?
VIII. refere-se especificamente a noção de ordem na discriminação dos agrupamentos?

Os resultados obtidos da análise encontram-se resumidos no Quadro 27 a seguir:

Quadro 27: Critérios de Análise para a Seqüência de Ensino apresentada pelos Sujeitos da Pesquisa

	SUJEITOS							%
	A	B	C	D	E	F	G	
I	N	N	S	S	S	N	S	57%
II	N	N	N	N	N	S	N	14,2%
III	S	S	N	N	N	N	N	28,4%
IV	S	N	N	N	S	N	S	42,6%
V	S	N	S	N	S	S	S	71%
VI	S	S	N	N	S	S	S	71%
VII	N	N	S	N	N	N	S	28,4%
VIII	N	N	S	N	S	S	N	42,6%
%	50%	25%	50%	12,5%	62,5%	50%	62,5%	

Legenda:
S – sim N - não

No Quadro 27, os percentuais na horizontal são indicativos da freqüência de respostas afirmativas, por questão levantada para análise. A menor freqüência (14,2%) é devida à questão II, mostrando apenas um aluno (E) que admite a possibilidade de ensino do conteúdo de combinatória apenas com o uso do Princípio Multiplicativo. A maior freqüência (71%) ocorre para as questões V e VI, mostrando que tanto a contextualização quanto o lado formal daquele conteúdo foram considerados critérios importantes para dirigir seu ensino por parte do grupo de alunos.

Na vertical do quadro, os percentuais obtidos são indicativos da freqüência de respostas afirmativas àquelas questões. Assim, segundo o critério utilizado, eles indicam de modo absoluto, os planos de aula mais próximos do ideal desejado nas condições da pesquisa. Segundo tais considerações, os melhores planos são proporcionados por E e G (62,5%) e os piores, por B e C com (25%) e (12,5%), respectivamente.

Em continuação ao cronograma da intervenção, ocorreu em seguida o "encontro com o acontecimento": uma aula dirigida e ministrada pelos sujeitos da pesquisa como se fossem "professores-em-ação".

Negociamos o processo na aula anterior ao encontro. Nela, ficou decidida a formação de dois grupos de trabalho: um dos grupos responsável por ministrar uma aula, como se fossem professores-em-ação aqui designado GM. O outro grupo, agindo como alunos-em-ação, aqui designado GA. Do grupo GM participaram os sujeitos A, F e D e outro Y, não pesquisado, mas que participou ativamente no dia do encontro. Estavam presentes 14 alunos, incluso os sujeitos não pesquisados. Resumimos, no Quadro 28 seguinte, o que ocorreu nesse encontro. Nele, os números entre parêntesis após uma sentença indicam, em minutos e segundos a partir do início da aula, os momentos em que captamos dados significativos para nossa análise.

Quadro 28: Descrição da aula do Encontro com o Acontecimento

TEMPO	GM: GRUPO MESTRE	GA: GRUPO ALUNO
	Parece nervoso. F e D preparam o quadro-negro.	Descontraído
0-10	F é o professor. Motiva. Lê definição posta no quadro (Definição como agrupamento). Ratifica B. Acrescenta: • A ordem é importante; • É seqüência • Dá fórmula para A_n^p Resolve Ex. 1: Com 8 lápis de cores de quantos modos podemos pintar uma bandeira de 4 listras? (3:10) D corrige enunciado: "listras distintas". F conclui o problema usando o princípio multiplicativo. F define permutação. Escreve $A_n^n = P_n$	B chama atenção: agrupamento ordenado. (2:29) Alunos observam G informa: Tá havendo repetição (3:15) Alunos parecem compreender.
10-15	F põe Ex. 2 no quadro. Questiona GA Escreve solução (12:00) da parte a. Questiona: "e a parte b" (12:40) Aguarda. Escreve solução no quadro. Conclui. Chama Y para continuar.	E e G participam: "as vogais funcionam como uma só letra" (11:30) Alunos escrevem! (13:15) Palmas!
15-25	Y faz o contraponto: "aprender a desorganizar".(16:10) Chama B, C e E ao quadro. Realiza dinâmica. Retorna ao tema desorganização (6 vezes). Compara Arranjo (ordena) com Combinação (desordena). Define Combinação (21:00). Põe problema: "quantas peças de dominó"(22:00) Indica: "naipes distintos" desenha pedra; faz solução (p.m.)	Parecem interessados na Dinâmica – Brincam. Parecem Compreender B responde: 7 x 7 (22:30) Alunos participam
25-35	Questiona: "pode ser ensinado na 4º série" (25:00) Fala sobre exemplos significativos do dia-a-dia. Mostra: "7º série tem que calcular o nº de diagonais do polígono. O que é isso?" (26:00) "E se fosse um prisma?" Menciona o que ocorre no Ensino Médio (Combinatória depois Geometria Espacial) Volta: Ordem x Desordem. Fala permutação com repetição. Exemplifica: Anagramas de ANA. "É sempre bom começar com um problema simples" Escreve todas as possibilidades. Propõe "Arara" (33:00) Encerra.	B responde: "Poder pode mas eu não tentaria" (25:05) Alunos parecem envolvidos com a colocação. B indica a solução (33:10) Palmas!
35-42	A retoma: quais as chances de Santa Cruz e Náutico se classificarem para o Grupo A (Momento próprio para o questionamento). Diz: "Trazer problemas do interesse dos alunos" (37:00) (Traz saco com 4 bolas representando os 4 times ainda na disputa). D ajuda (39:00). A apresenta resultado. Mostra necessidade da fórmula para números grandes: "E se fosse no início do campeonato". Encerra.	Brincam. Participam. Aparentam gostar. Interagem (40:00) Palmas!

Um certo nervosismo por parte de F é notado quando B chama a sua atenção para "agrupamento ordenado" aos dois minutos e vinte e nove segundo e quando G também o corrige ao falar "tá havendo repetição" aos três minutos e quinze segundos. Apesar disso, a interação entre GM e GA é positiva, colocando um dado novo na relação professor x aluno: em vez de dono do conhecimento, o professor, agora, torna-se parceiro do aluno para construí-lo. O modo como F aborda o problema, diretamente através do princípio multiplicativo e desconsiderando a forma de arranjo, aparentemente não é notado pelo resto dos alunos. Na condução $P_n = A^n_n$, também não há o questionamento clássico a cerca da definição 0! = 1, pertinente neste momento. No exemplo 2, colocado no quadro por F, pede-se em sua primeira parte, o "número de anagramas da palavra Teoria, que mantém as vogais juntas em uma mesma ordem". As participações de E e G são decisivas para a solução (11:30). Elas também foram conclusivas na solução para a segunda parte do problema em que F provocava "e se a ordem das vogais for diferentes" (12:40).

O comportamento participativo do GA é evidenciado também ao ser observado (13:15) que seus componentes escreviam as soluções no caderno, comportando como se fossem "alunos-em-ação" havendo a confirmação de que aqueles sujeitos acataram esta fase do CEK. Houve, de fato, um "encontro com o acontecimento" mesmo por parte do grupo não pesquisado. No momento (16:10), encontramos na metáfora "desorganizar" usada por Y, a revelação de um sentido, para nós novo, no conceito de combinação. Este foi um momento em que ocorreu para nós o verdadeiro sentido do que seria uma aprendizagem significativa: Y foi às raízes da concepção do conceito, desconstruindo a idéia de multiplicação relacionada à ordenação com a noção de desorganização associada à divisão!

A dinâmica usada por Y, qual seja a de escolher três alunos da sala para demonstrar como escolher dois deles de forma ordenada ou não, a participação ativa do GA, o uso insistente do termo desorganizar com a correspondente ação por parte dos alunos chamados para a dinâmica (A, B, e C), conduziu-nos a repensar a importância do adjetivo significativa posposto ao substantivo aprendizagem, ocorrendo aí o despertar do nosso olhar para o termo "desorganizar".

Nos momentos seguintes (22:00) Y considera o problema de saber quantas peças tem um jogo de dominó comum. B indica solução errada (22:30) logo corrigida por Y com o uso do princípio multiplicativo.

Encontramos aí as recomendações dadas por Lima etal (2004, p. 111) sobre o ensino de combinatória "aprenda e faça com que seus alunos aprendam com os erros".

Nas considerações levantadas por Y nos momentos (25:00) e (26:00), notamos a preocupação de um professor sobre a pertinência do conteúdo abordado em relação ao quando fazê-lo: era um "professor-em-ação" questionando a si e a seus colegas sobre condicionantes desta ação. Tem-se aí, segundo nossa consideração, a essência do conceito de consistência do construto contido nos corolários da permeabilidade e da fragmentação da teoria de Kelly, uma vez que Y estava implementando um padrão de conduta que incorporava a função de professor em suas dimensões cognitiva, comportamental e afetiva.

A participação de B (25:05), a solução de G (33:10) para uma classe de problemas excluída da nossa preocupação inicial (permutações com repetição) trouxe à tona a idéia de que o grupo tinha obtido um diferencial de compreensão de combinatória, suficiente para obter sucesso na realização do pós-teste! Isto é, enquanto pesquisadores engajados que estávamos com a teoria de Kelly sendo suporte de nossas ações, justificávamos naquele momento desse teórico com um dado para ele essencial: a antecipação de eventos como modo de canalizar nossas escolhas.

Finalmente, a participação de A, ao assumir a condução da aula, ratifica o empenho do grupo quanto ao objetivo declarado para a intervenção: "trazer problemas de interesse para o aluno" (37:00) e remete-nos à idéia de contextualização do saber, enquanto que a consideração sobre a necessidade das fórmulas, para problemas com números muito grandes, dão à proposta de ensino do grupo GM, um todo coerente e indicativo de avanços na compreensão de combinatória por parte do grupo pesquisado. Esta confirmação ou não foi o objetivo da próxima etapa do CEK.

4.2.5. Confirmação ou Refutação

Nesta fase da pesquisa usamos como instrumento de análise os mesmos problemas propostos no pré-teste da intervenção. Resumimos no Quadro 29 a seguir os resultados obtidos, já em comparação com o pré-teste.

Quadro 29: Pré-Teste X Pós-Teste da Intervenção segundo CEK

PROBLEMAS	**PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE**														%	
	A		B		C		D		E		F		G			
	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
1ª	**T**	**R**	**T**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**42,6%**	**100%**
1b	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**42,6%**	**71%**
2	**T**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**71%**	**100%**
3	**T**	**R**	**T**	**T**	**R**	**R**	**T**	**T**	**R**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**42,6%**	**71%**
4	**T**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**R**	**T**	**R**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**57%**	**85,7%**
5	**N**	**R**	**T**	**R**	**R**	**R**	**T**	**N**	**R**	**R**	**R**	**T**	**R**	**R**	**57%**	**71%**
%	**0%**	**83%**	**0%**	**67%**	**67%**	**100 %**	**67%**	**50%**	**100 %**	**100 %**	**33%**	**83%**	**100 %**	**100 %**		
Tempo gasto	**39**	**20**	**20**	**26**	**38**	**20**	**25**	**21**	**29**	**39**	**29**	**21**	**18**	**24**		

A análise dos resultados obtidos mostrou um desempenho melhor do grupo, em todos os problemas propostos, com exceção do aluno D. Ademais, o tempo total gasto na realização dos problemas pelo grupo diminuiu de 198 minutos para 171 minutos.

Os resultados por aluno mostram também avanços expressivos: A saltou de 0% de acertos no pré-teste para 100% no pós-teste. Enquanto B de 0% para 67%. Todos os demais alunos, exceto um, tiveram avanços ou permaneceram com seus resultados na passagem do pré-teste para o pós-teste. O aluno que apresentou recuo, D, o fez na questão 4 proposta. Abaixo indicamos os fragmentos de protocolo de pré-teste e pós-teste desse aluno na questão mencionada.

Figura 10: Fragmentos de Protocolo 4 (Resultados de D no problema 4 do pré-teste e do pós-teste)

Problema 4: Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?	
Pré-teste	Pós-teste
$\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{3}$ $6.5.3 = 90$ Nº NATURAIS PARES.	$\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{3}$ $4.3.3 = 24$

Procurado sobre a mudança na resolução o aluno reconheceu o erro dizendo que "houve distração". Simulamos problemas análogos para o aluno nos quais ele obteve sucesso.

O aluno F, apesar de ter melhorado o seu rendimento na solução dos problemas, apresentou uma "queda" no que diz respeito ao problema 5.

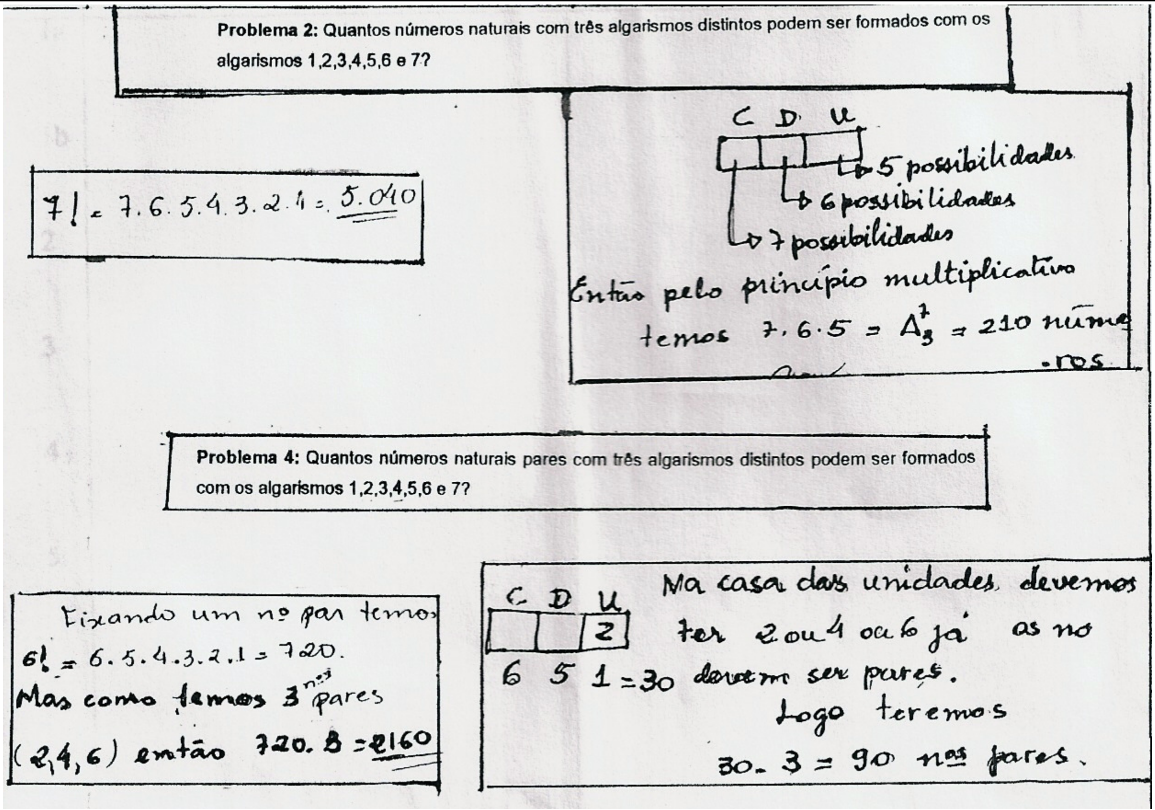
Figura 11: Fragmentos de Protocolo 5 (Resultados de F no problema 5 do pré-teste e do pós-teste)

Problema 5: Quantos triângulos podemos formar com 8 pontos distintos do plano sabendo que precisamente três destes pontos estão alinhados ?	
Pré-teste	Pós-teste
$C_{8,3} - 1$ $C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}3.2.1} = 56$ $56 - 1 = 55$ Triângulos	$3C_{5,2} = 3.\frac{5!}{2!3!} = 3.\frac{5.\cancel{4}^{2}.\cancel{3!}}{\cancel{2}.1.\cancel{3!}} = 30$ Triângulos 7

Observemos a mudança ocorrida no aluno A nos problemas 2 e 4 entre o pré-teste e o pós-teste.

Figura 12: Fragmentos de Protocolo 6 (Resultados de A no pré-teste e pós-teste)

Pré-teste	Pós-teste



Problema 2: Quantos números naturais com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?

$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5.040$

C D U

→ 5 possibilidades

→ 6 possibilidades

→ 7 possibilidades

Então pelo princípio multiplicativo temos $7.6.5 = A_3^7 = 210$ números.

Problema 4: Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?

Fixando um nº par temos
$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720.$
Mas como temos 3 nºs pares
(2,4,6) então $720.3 = 2160$

C D U
$\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{2}$
6 5 1 = 30

Na casa das unidades devemos ter 2 ou 4 ou 6 já as nºs devem ser pares.
Logo teremos
30. 3 = 90 nºs pares.

O corolário da construção de Kelly referenda o desenvolvimento cognitivo das pessoas com base na elaboração e reelaboração de réplicas dos eventos por ela antecipados. Ao longo da intervenção esperamos ter fornecido elementos para que cada aluno vivenciasse esse processo tanto individualmente quanto pelas interações proporcionadas. Com os resultados obtidos, em grande parte, confirmando nossa hipótese inicial, passamos à fase seguinte do CEK.

4.2.6. Revisão Construtiva

Durante o encontro com o acontecimento obtivemos indicativos de avanços na compreensão do conteúdo da intervenção, por parte dos alunos pesquisados. Na fase seguinte do CEK referendamos tal constatação. Isto é, a elaboração de seqüências didáticas, por parte do grupo pesquisado, e sua efetivação como prática de ensino, propiciaram avanços na construção do conhecimento em Combinatória dos sujeitos da pesquisa.

Para a última fase do CEK - a revisão construtiva - pensamos em como dirigir a pesquisa, de modo a consolidar tais avanços e a "aumentar o repertório de construtos" (KELLY, 1963, p. 9) dos alunos pesquisados. Estes, como nos referimos, estavam como se fossem "professores-em-ação".

Daí termos considerado uma ampliação do processo em curso, pondo os alunos em uma situação de ensino, fundamental nesse processo: o de elaborar um instrumento de avaliação. No último encontro da intervenção, dividimos o grupo-classe em dois conjuntos de alunos de modo que os grupos GM e GA estivessem em conjuntos distintos. Em seguida, dirigindo-nos aos dois grupos, solicitamos que elaborassem um instrumento de avaliação do conteúdo trabalhado. Sugerimos, também, que esse instrumento contivesse quatro questões de resolução aberta, nos moldes do Pré-teste. Deixamos os grupos livres para direcionarem suas ações, limitando o tempo de elaboração em trinta minutos.

Observamos que, em cada conjunto de alunos, os grupos GM e GA tiveram participação ativa. O sujeito F escreveu a redação do conjunto de alunos em que GM estava incluso. Analogamente, C redigiu a avaliação proposta pelo conjunto de alunos em que GA se incluía. Cada conjunto de alunos elaborou, como instrumentos de avaliação, um teste com quatro problemas de resolução aberta, designados aqui por T_1 e T_2, respectivamente. O tempo gasto para tal elaboração foi de vinte minutos. Ato contínuo solicitamos que cada conjunto de alunos resolvesse o teste proposto pelo outro conjunto de alunos. Os testes elaborados estão indicados a seguir.

TESTE T_1 (Elaborado como a participação ativa de GM)

> **T_{11}.** Uma sementeira contém doze mudas de rosas e oito mudas de cravos. Um cliente deseja comprar três mudas de rosa e quatro mudas de cravo. De quantos modos ele pode efetivar tal compra?
>
> **T_{12}.** Um time de futebol de salão tem onze jogadores dos quais somente André é goleiro. De quantos modos o técnico pode escalá-lo para jogar se os demais jogadores podem jogar em qualquer das posições restantes?

$T_{13.}$ Há cinco estradas ligando a cidade A à cidade B, seis ligando B a C e seis ligando C a D. Quantas são as maneiras de ir de A para D passando por B e C e usando tais estradas?

$T_{14.}$ Quantos números naturais de cinco algarismos distintos são menores que 43892?

TESTE T_2 (Elaborado com a participação ativa de GA)

$T_{21.}$Quantos números naturais com cinco algarismos distintos iniciados por sete ou por nove têm os demais algarismos todos pares?

$T_{22.}$ Quantos números naturais com seis algarismos distintos podem ser construídos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, de modo que eles alternem algarismos pares e ímpares em sua escrita?

$T_{23.}$ De um grupo de oito alunos, deseja-se formar uma diretoria para o grêmio com quatro alunos de modo a se ter um presidente, um vice-presidente, um secretario e um tesoureiro. De quantos modos pode-se escolher tal diretoria?

$T_{24.}$ Uma sementeira contém doze mudas de rosas e oito mudas de cravos. Um cliente deseja comprar três mudas de rosa e quatro mudas de cravo. De quantos modos ele pode efetivar tal compra?

Deixamos o resto do tempo livre para que o conjunto de alunos elaborasse a solução dos problemas propostos. O grupo que redigiu a solução do T_1 gastou vinte dois minutos nesta resolução. O outro grupo de alunos gastou vinte e oito minutos para tal. Os alunos foram liberados após a entrega dos protocolos de resolução para nossa consideração e análise.

Note-se que o problema T_{11} elaborado por GM coincidiu com o problema T_{24} elaborado por GA, fato não relevante para a pesquisa uma vez que a fonte de onde ambos os grupos retiraram os problemas foi a mesma e eles estavam sob nossa observação durante as escolhas.

4.2.7. Resultados e Considerações Finais

Analisamos a compreensão dos conceitos de combinatória e seu uso por parte dos licenciandos, em uma situação em que se fez a simulação do que acontece, normalmente, no processo de ensino deste conteúdo. Caracterizamos, inicialmente, o ambiente em que tal situação ocorreria (no transcurso da disciplina Fundamentos da Matemática), os sujeitos sobre o quais investigaríamos a aprendizagem (os alunos da disciplina) e o procedimento metodológico adotado como suporte: o uso do CEK.

Nosso objetivo foi o de acompanhar o avanço na compreensão dos conceitos de combinatória e seu uso na resolução de problemas de contagem por parte daqueles licenciandos, em um contexto que os possibilitasse elaborar um plano de ensino naquele conteúdo. Nossa hipótese era de que o trabalho como se professores fossem propiciaria um tal avanço.

O pré-teste, elaborado com cinco questões de combinatória, sendo a primeira dividida em dois itens, mostrou-nos a necessidade da intervenção, nos sentido do relativamente pequeno acerto por questão no grupo pesquisado (em torno de 50%, retirando-se a questão 2, para a qual houve 71% de percentual de acertos). Em uma simulação de notas, supondo cada questão com peso 2, e considerando apenas certo ou errado, dois do sujeitos pesquisados tirariam nota zero, um tiraria nota quatro, um tiraria nota seis, um tiraria nota oito e dois tirariam nota dez, o que representa uma distribuição de notas aceitável, não fosse o fato de que aquele conteúdo deverá ser ensinado por aqueles sujeitos, futuros professores.

Consideradas as estratégias usadas para a resolução dos problemas no pré-teste, observamos ainda o caráter dominante do uso do princípio multiplicativo como estratégia mais escolhida. Seu uso como estratégia com sucesso na efetiva resolução dos problemas ficou para segundo lugar, mas este fato é decorrente de que, em princípio, o uso dessa estratégia em todos os problemas demandaria um processo de "desconstrução" do princípio multiplicativo, no sentido do que indicaremos nas considerações finais.

Nas fases de antecipação e do investimento, ficamos sem muitos instrumentos de registro de retorno para nossa inquirição, a não ser nosso olhar sobre o grupo pesquisado, em parte comprometido por nossa participação como instrumento da intervenção. Neste sentido, foi extremamente importante uma ação não planejada na metodologia, que deu mais significância a essa fase da pesquisa: a solicitação da elaboração de mapas conceituais por parte dos sujeitos.

Notamos aí, no processo de hierarquização de conceitos considerados pelo grupo, nos equívocos dele demandados, uma certa tradicionalização no modo de ver tais conceitos pelo grupo.

A tarefa de associação de problemas mostrou que todos os sujeitos, exceto um, categorizaram os problemas segundo estratégias disjuntas de olhar: ordem ou não ordem. Uma barreira, neste olhar foi por nós colocada ao considerarmos "problemas de soma" entre os problemas dados.

No encontro com o acontecimento, as categorias usadas para análise das seqüências didáticas elaboradas pelos sujeitos, mostraram duas diretrizes consideradas como relevantes pelos sujeitos no ensino de combinatória: contextualizar o saber (71%) e a ênfase em demonstrar fórmulas. Apenas 14,2% dos sujeitos apontam o uso do princípio multiplicativo como técnica de contagem determinante.

A aula, organizada pelo Grupo Mestre (GM) e a participação dos demais alunos, mostraram uma realidade bem mais dinâmica do que aquela vista na elaboração dos planos de aula: um todo integrado, com participação ativa dos sujeitos pesquisados e determinando significados para o processo de contagem, antes não observados pelo pesquisador: a idéia de desordenação associada à divisão análoga à idéia de ordenação associada à multiplicação no conceito de combinação. Foi instituída em aula um "princípio da divisibilidade" (para elaborarmos uma paródia com princípio multiplicativo).

O pós-teste mostrou claramente os avanços efetivados pelos sujeitos do grupo pesquisado, tanto na resolução por questão, por parte do grupo, quanto na realização da "prova" por cada aluno. O resultado negativo apresentado por D na questão 4 pode ser considerado como uma distração sua, tendo em vista suas soluções dadas a problemas semelhantes.

Na revisão construtiva tivemos a oportunidade de observar os sujeitos em situação de elaboração de uma prova. Ambas as provas elaboradas (T_1 e T_2) foram considerados como mais difíceis que o pós-teste, por três professores de matemática do ensino médio. Todas as questões foram corretamente resolvidas pelo grupo, em uma situação em que observamos sua construção e resolução, notando a participação efetiva dos sujeitos pesquisados, inclusive em suas redações!

Diante da análise considerada, constatamos, pois, um aumento de compreensão dos conceitos de combinatória e seu uso na resolução de problemas de combinatória.

As evidências notadas durante a intervenção apontam nosso olhar para os seguintes fatos:

- Há uma carga formal no ensino do conteúdo de combinatória, a qual é assumida pelos licenciandos, advinda talvez do meio de ensino em que se inserem enquanto aprendizes. Os mapas conceituais mostram este fato (protocolos 1, 2 e 3) no tradicionalismo em derivar os conceitos de arranjo, combinação e o princípio multiplicativo (há uma "teoria" matemática sendo construída). Isto também é sentido na freqüência com que a chamada solução heurística é deixada para trás pelo uso das fórmulas (Quadro 26);

- A interação entre os grupos GA e GM durante o Encontro com o Acontecimento é indicativa de que a idéia de colocar os licenciandos como autores do processo de ensino é uma estratégia de formação a ser considerada nos cursos de licenciatura;

- Na hipótese de termos que escolher um momento de destaque para a intervenção, consideraríamos aquele em que o sujeito Y, no papel de professor, colocou a metáfora "temos que desorganizar", durante o Encontro com o Acontecimento. Sentimos naquela ocasião um redescobrir de significado perdido no ensino fundamental para a noção de contagem: aquele associado à divisão. Estratégias de ensino para retomar esta busca naquele nível de ensino, devem ser motivos de outras pesquisas pelos educadores;

- O uso do CEK como diretriz metodológica da ação do pesquisador permitiu um sentido lógico no desenrolar dos acontecimentos, que facilitou o andamento da investigação. A escolha das tarefas para cada etapa do Ciclo principalmente o investimento feito sobre Situações Didáticas permitiram uma maior ação reflexiva dos sujeitos da pesquisa o que estabelece um critério diferenciador daquilo que seria uma prática tradicional de ensino. As evidências observadas nos mostram que tal uso proporcionou o avanço notado entre os resultados do pré-teste e do pós-teste, permitindo aos sujeitos uma aprendizagem significativa em Combinatória.

Em suma, podemos considerar que a intervenção desenvolvida satisfez o seu objetivo, não só no sentido dos avanços proporcionados na construção do conhecimento em combinatória pelos sujeitos, como também por ter permitido outros olhares na proposta de integração dos saberes básicos na formação do professor de matemática.

5. CONCLUSÕES

Em nossa investigação, por duas vezes, estudamos um grupo de licenciandos em matemática submetidos a uma prática de ensino em Combinatória Elementar. Na primeira, consideramos um grupo imerso em uma situação tradicional de ensino. Na outra, repetimos o processo sob outra condição: os licenciandos foram "professores-em-ação". Nas duas práticas, os sujeitos da pesquisa foram considerados em um mesmo momento de sua formação: o quarto período da licenciatura em Matemática na UFRPE. O estudo não teve o caráter comparativo, e sim o de indicar caminhos para uma melhor apreensão dos condicionantes que se impõem na construção de uma aprendizagem significativa, por parte dos licenciandos, naquele conteúdo, mais especificamente, na resolução de problemas a ele internos.

Inquietava-nos, como dissemos, a dicotomia saber pedagógico x saber específico. Já há algum tempo, os estudiosos da problemática levantada pelo processo de formação de professores dirigem seus questionamentos para análise dos saberes que incorporam tal formação. Nóvoa (1999, p. 25) afirma que a formação do professor "não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos, de técnicas), mas sim por meio de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de (re)construção permanente de uma identidade pessoal".

A citação acima remete-nos ao teórico tomado como base de nossa pesquisa: George Kelly. Poderíamos tê-la substituído pela metáfora do homem-cientista aplicada ao professor em formação: alguém que estaria a todo instante refazendo suas hipóteses sobre os atos de aprender e de ensinar, tentando prever e controlar toda sorte de eventos sobre estes atos, a ele relacionados.

Por outro lado, a investigação realizada no estudo-piloto confirmou a necessidade da segunda parte da pesquisa e foi importante em si por ter nos apontado uma outra dicotomia: saber formal x saber contextualizado. Todos os resultados formais indicados durante a prática sobre Arranjos, Permutações e Combinações foram insuficientes para que os alunos tivessem um ganho importante na aprendizagem da resolução de problemas combinatórios.

Courant (2000) fala na grave ameaça que esse formalismo matemático traz para a própria vida da Ciência. Podemos entender a idéia reinante por trás do que chamamos saber formal, aquela que tem dirigido as ações de ensino das disciplinas específicas no curso de Licenciatura em Matemática. Tal construção, também importante, não deve ser a causa suprema da formação do professor de Matemática.

O que tem ocorrido com o ensino de combinatória, em nossa opinião, é o deslocamento do estudo das ações de ensino que permitam ao aluno aprender a contar, em seus vários aspectos relacionados às operações fundamentais, para um ambiente formal de ensino, em que são criados conceitos (arranjos, combinações, permutações) os quais escondem os sentidos originais do processo de contar, como aqueles apontados por Loureiro (1997). Encontra-se aí uma das razões para o pouco sucesso mostrado pelos resultados na prática tradicional (Quadro 21).

Acreditamos que é sobre esses “sentidos originais” que devemos conduzir nossa intenção pedagógica para trabalhar a aprendizagem da resolução dos problemas de contagem, já no ensino fundamental. A pesquisa sobre quando e como tais sentidos surgem nas crianças e a confecção de técnicas didáticas para derivar daí processos mais gerais de contagem podem indicar a saída para retirar do ensino de matemática as dificuldades que a combinatória vem causando. Talvez seja esse um direcionamento em que, pedagogia e matemática, podem, conjuntamente, tornarem-se realizadoras de uma ação de ensino, extremamente relevante para os cidadãos em geral, e, em particular, para os futuros professores de Matemática.

Daí, um dos resultados que consideramos mais importantes de nossa pesquisa é o fato dela ter mostrado, principalmente durante a sua segunda parte, que o Princípio Multiplicativo deve ser considerado como uma das bases para fundamentar dentro do ponto de vista pedagógico a classe de problemas de contagem abordada pela Análise Combinatória, ratificando os resultados obtidos por Dornelas (2004) também quando os sujeitos da pesquisa são licenciandos. A análise das estratégias usadas para resolução dos problemas (Quadro 26), dos fragmentos de protocolo dos mapas conceituais dos alunos (Figuras 7, 8 e 9), dos resultados comparativos do pré-teste e pós-teste acentuados pela informação dos protocolos indicados nas Figuras 10, 11 e 12 e do próprio Encontro com o Acontecimento, levam-nos a essa conclusão.

Queremos acreditar que a contribuição dada pelo aluno Y ao formular a noção de desorganização durante o Encontro com o Acontecimento, traz um dado relevante tanto para nossa consideração pedagógica quanto para consideração matemática. Pedagogicamente tal contribuição aponta para um “sentido combinatório da divisão”, da mesma forma do “sentido combinatório da multiplicação” apontado acima. Matematicamente, fica a questão: é possível enunciar um princípio para a divisão que traduza o conceito de desorganização (desordenação) assim como o princípio multiplicativo traduz uma certa idéia de ordenação?

O uso do CEK para conduzir as ações da pesquisa durante a intervenção permitiu-nos implementar uma dinâmica condizente com as condições de reflexividade crítica e de (re)construção permanente supostas na Teoria dos Construtos Pessoais: nossa conferência participativa e a discussão sobre situações didáticas (Anexo 3) trouxeram considerações diversas sobre os atos de ensinar e de aprender, a relação entre esses atos, seus pressupostos epistemológicos, importância de se pensar a aprendizagem de um conhecimento específico incluído numa proposta científica para uma didática sobre ele e a necessidade de uma tomada de posição filosófica sobre essas considerações. Ainda mais, o formato imposto ao longo das etapas do CEK, requisitando tarefas de interação entre os alunos tais como: a formação dos grupos GM e GA, e a revisão construtiva em que um grupo elaborou e corrigiu uma avaliação para o outro grupo permite-nos falar em que o processo de organização da aprendizagem observada foi intrinsecamente colaborativo por parte dos alunos.

Finalizando, a dinâmica citada acima fez com que os alunos incorporassem de tal forma a idéia de agirem como se professores fossem, permitindo os bons resultados indicados no Quadro 29, e atestando afirmativamente o problema que pretendíamos resolver.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

AUSUBEL, D. P. **Psicologia educativa:** um ponto de vista. Trad. Roberto Helier Dominguez do original Educational Psychology: A Cognitive View. México: Editorial Trillas, 1978.

BACHX, A. de C.; POPPE, L.M.; TAVARES, R.N. **O prelúdio à analise combinatória**. São Paulo: Nacional, 1975.

BARBOSA, R.M. **Combinatória e Probabilidades**. São Paulo:Nobel, 1970

BASTOS, H.F.B.N. **Changins teacher´s practice:** towards a constructivist methodology of physics teaching. Tese de doutorado. Inglaterra: University of Surrey, Londres 1992.

BERTONI, N.E. A experiência da Licenciatura em Matemática na Universidade de Brasília. In: Anais do I Seminário sobre Licenciaturas: **A articulação teoria e prática na formação dos professores**. UFF, Rio de Janeiro, 1994.

BICUDO, M.A.V. (Org) **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

BICUDO, M.A.V. ; GARNICA, A.V. Marafioti, **Filosofia da educação matemática.** 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomilde. São Paulo: Edgard Blücher, Ed da Universidade de São Paulo, 1974.

BOGDAN, R.C; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Ed. 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais, 1**. Bases Legais. Brasília: 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros curriculares nacionais,** 3. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: 1999.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**: Didactique des Mathématiques, (1970-1990) Eds. & Transl: Nicolas Balacheff, et al. Math. Educ. Lib., v. 19, Kluwer Academic, 1997.

CASTRUCI, B. **Elementos de teoria dos conjuntos**. São Paulo: GEEM, 1978.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH & M. GASCÓN, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CLONIGER, S.C. **Teorias da personalidade.** São Paulo: Martins Fontes, 1999.

COSTA, N.C.A. da **Introdução aos fundamentos da matemática**. 2ª ed. São Paulo, Hucitec, 1977.

CUNHA, M.I.A. **O professor universitário na transição de paradigmas.** São Paulo: J.M. Editora, 1998.

D'AMBRÓSIO, B.S. **Formação de professores de matemática para o século XXI:** o grande desafio. In Pro-Prosições. São Paulo v.4, nº 1. p.35-41. , 1993

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2000.

DIEUDONNÉ, J. **A formação da matemática contemporânea**. Lisboa: Dom Quixote, 1990.

DORNELAS, A.C.B. **O princípio multiplicativo como recurso didático para a resolução de problemas de contagem.** 2004. 128f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004.

ECHEVERRÍA, M. P. P. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (Org.) et al. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ECHEVERRÍA, M. P. P. e POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.) et al. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues – Campinas, São Paulo: Ed. da Unicamp, 2004.

FARIAS, S. **Curso de álgebra**. V. 2. Porto Alegre: Globo, 1967

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática:** o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação – Campinas, 1994.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. In Educação Matemática – Uma introdução. Série Trilhas, São Paulo: EDUC, 1999.

GAZIRE, E. S. **Resolução de problemas:** perspectivas em educação Matemática. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1989.

HALMOS, P.R. **Teoria ingênua dos conjuntos.** São Paulo: Polígono, 1982.

HAZZAN, S**.** ; IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória e probabilidade. São Paulo: Atual, 1993.

KELLY, George A. **A theory of personality**: The Psychology of Personal Constructs. New York:. The Norton Library, 1963.

LE BLANC, J. F. You Can Teach Problem Solving. **Arithmetic teacher.**, p. 16-20. Nov. 1977

LIBÂNEO, J.C. **Didática.** São Paulo: Cortez, 1994. 263 p. (Coleção Magistério).

LIMA et al. A **Matemática para o ensino médio**, vol 2. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LOUREIRO, C. **Multiplicação, combinatória e desafios**. Educação e Matemática, ano 10, n.44 p 14-20, 1997.

MEYER, P. **Probabilidade - aplicações à estatística**. 2 ed. São Paulo: LTC, 1983.

MINGUET, P.A. **A construção do conhecimento na educação**; trad. J.A. Llorens. Porto Alegre: Artmed,1998.

MINAYO, M.C.S. (Org) **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde. São Paulo: Hucitec, 1998.

MIZUKAMI, M.G.N. **Ensino:** as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MOREIRA, M. A. **Teorias da aprendizagem**. São Paulo. EPU, 1999.

MORGADO, A. C. O.;et al. **Análise combinatória e probabilidade**: Coleção Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1991.

NOVAK, J. D. ; GOWIN, D. B. **Aprendiendo a aprender.** Barcelona, España: Martinez Roca, 1988.

NÓVOA, A. (Org) **Profissão professor**. Porto: Porto Editora, 1999.

ONUCHIC, L.R. **Ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas.** In BICUDO, M.A.V. Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

PAULA, E. **A álgebra elementar** São Paulo, FTD 1938.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação e Cultura. **Rumo à universidade**.(Módulo 3.) São Paulo: AESP, 2005.

RODRIGUEZ, J.A. **História de la matemática**. Madrid: Akal, 1989.

ROMANELLI, O.O. **História da educação no Brasil** (1930/1973). 9° ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1978.

STÁVALE, J. **Exercícios de matemática:** Quinto Ano. São Paulo: Nacional, 1939.

TAVARES, C.S. ; BRITO, F.R.M. Contando a história da contagem**. Revista do professor de matemática**.. p.34-37 nº 57, São Paulo, 2005

WEST, D. B. **Introduction to graph theory.** Illinois: 2nd.Prentice Hall, 2001.

7. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar.** São Paulo: Papirus, 1995.

ANDRADE, V.L.V.X. **Avaliação dos efeitos de uma seqüência didática na concepção de ensino-aprendizagem e na construção do conceito de homotetia em licenciandos em Matemática.**. 2005. 149 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2005.

AUSUBEL, D. P. Some psychological and educational limitations of learning by discovery. **The arithmetic teacher**. New York, may, 1964, p. 290-302.

BACHELARD, G. **A Formação do espírito científico**: contribuição para uma análise do conhecimento. Trad. Estela dos Santos Abreu do original la Formation de Espirit Scientifique. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

CUNHA, M.I.A. pesquisa qualitativa e a didática. In: OLIVEIRA, M. R. N. S. (Org.). **Didática:** ruptura, compromisso e pesquisa. Campinas: Papirus, 1993. cap. 5, p. 89 – 99.

DAVIS, P.J. ; HERSH, R. **A experiência matemática.**(Tradução de João Bosco Pitombeira) Rio de Janeiro: F.Alves, 1985

DICKSON, L.E. **History of the theory of numbers.** (3 volumes) Carnegia Institution, 1923

DUMONT, I. **Álgebra elementar**. São Paulo: Francisco Alves, 1938. (Coleção FTD).

FERNANDES, A.M.V. [et.al] **Fundamentos de álgebra.** Belo Horizonte: Ed. da UFMG, 2005.

HENRY, M. **Apresentação da didática da matemática**. In. Nota de Curso sobre Didática de Matemática. PUC –. Tradução: Profª Licia Souza Leão Mia, São Paulo 1992.

LA TAILLE, Yves de. **Piaget, Vygotsky, Wallon**: teorias psicogenéticas em discussão – São Paulo: Summus, 1992.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving, cognition.** NY: W. H. Freeman and Company, 1983.

MERRIL, M.D; KELETY, T. & WILSON, B.S. Elaboration theory and cognitive psychology. **In Instucional Science**, 13, 1981. p. 203-212.

NATIONAL **Council of teachers of mathematics**. An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's. Reston, VA – USA, 1980.

OLIVEIRA, M. M. de; **Como fazer uma monografia**. Recife: Bagaço, 2003.

PAGNOL, M. **Topaze.** Paris: Le Livre de Poche, 1969.

PAIS, L.C. **Didática da matemática;** uma análise da influência francesa – 2° ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PERRENOUD, P. **10 Novas competências para ensinar**; tradução Patrícia Chittoni Ramos. – Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola** - Tradução: Bruno Charles Magne – Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

POLYA, G**. A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa Araújo do original: How to Solve it. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RONAN, C. A. **História ilustrada da ciência:** Da renascença à Revolução Científica III. Universidade de Cambridge. Trad. Jorge Enéas Fortes do original The Cambridge Ilustrated History of the World's Science. São Paulo: Círculo dos Livros, 1983.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 1986.

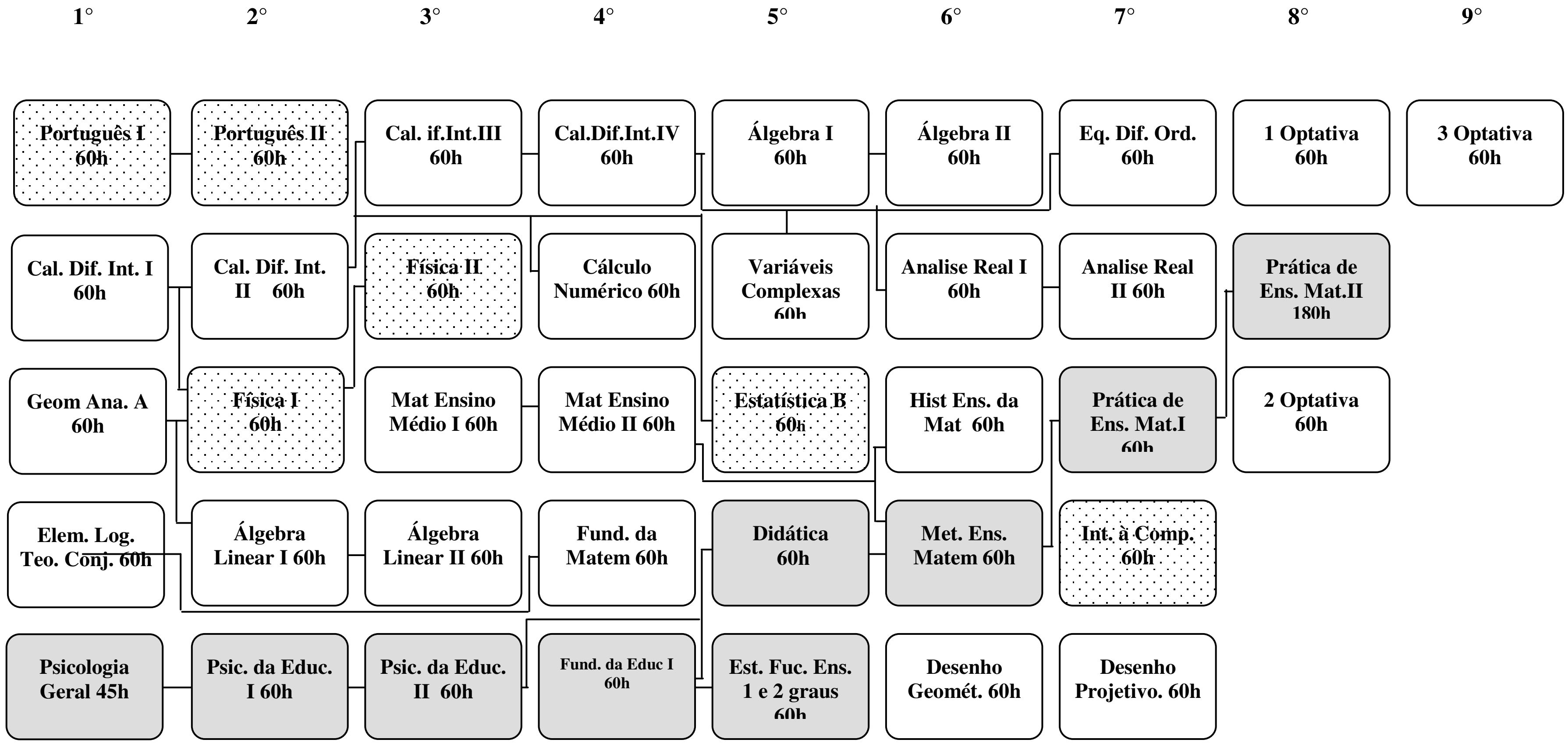
VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S**. A construção do pensamento e da linguagem** – tradução Paulo Bezerra – São Paulo: Martins Fontes, 2000.

WILDER, R.L. **Introduction to the foundations of mathematics**. Nova York: John Wiley & Sons, 1965.

ANEXO 1

Anexo 1: Organograma da Licenciatura em Matemática da UFRPE



Legenda:

Disciplinas de caráter pedagógico

Disciplinas específicas do curso

Disciplinas de outros domínios

ANEXO 2

Anexo 2: Relação de Problemas Propostos durante o Estudo-Piloto

1. De um cidade A para uma cidade B há 3 estradas. Da cidade B para outra cidade C há 4 estradas. Quantas são as maneiras de saindo de A chegar em C passando por B, usando tais estradas?

2. Uma bandeira é formada por 4 listras que devem ser coloridas, usando-se as cores amarelo, branco, cinza, não devendo listras adjacentes terem a mesma cor. De quantos modos pode a bandeira ser colorida?

3. Quantos números naturais de 4 algarismos que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados, usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

4. Quantos são os números naturais pares que se escrevem com 3 algarismos distintos?

5. Uma recepcionista se apresenta par seu laboratório vestindo calça e blusa de cor diferente. Para que ela possa se apresentar durante 24 dias de trabalho com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (calças + blusas) de que precisa é?

6. Quantos números de 4 dígitos são maiores que 2400?
   a) Tendo todos os dígitos diferentes?
   b) Não tendo dígitos iguais a 3, 5 e 6?
   c) Obedecem a e b juntos?

7. O conjunto A possui 4 elementos e o B 7 elementos.
   a) Quantos são as funções f: A $\rightarrow$ B
   b) Quantos são as funções injetoras?

8. Um conjunto A tem 7 elementos e um conjunto B tem 4 elementos. Quantas são as funções injetoras de A em B?

9. Numa disputa com 6 competidores, de quantas maneiras distintas podemos classificá-los em primeiro, segundo e terceiro lugares?

10. Obter expressões em termos de fatoriais para o produto dos n primeiros:
    a) números pares
    b) números ímpares

11. De quantos modos diferentes podemos dispor em uma mesma prateleira de estante, 4 livros de matemática, 3 de física e 2 de química, de modo que os livros de uma mesma matéria fiquem juntos?

12. Com a palavra MARTELO.
    a) Quantos anagramas podemos formar?

b) Quantos anagramas podemos formar começando por M?

c) Quantos anagramas podemos formar começando por M e terminando por O?

d) Quantos anagramas podemos formar começando por vogal?

e) Quantos anagramas podemos formar terminando por consoante?

f) Quantos anagramas podemos formar começando por vogal e terminando por consoante?

g) Quantos anagramas podemos formar começando por vogal ou terminando por consoante?

h) Quantos anagramas podemos formar apresentam MAR juntas nesta ordem?

i) Quantos anagramas podemos formar apresentam MAR juntas numa ordem qualquer?

13. Escrevendo em ordem crescente todos os números naturais de cinco algarismos distintos, formados por 1, 2, 3, 6 e 8, qual a ordem do número 36812?

14. De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

15. De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?

16. De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em grupos de 4 pessoas?

17. Quantos subconjuntos com p elementos tem um conjunto com m elementos ($p \leq m$)?

ANEXO 3

Anexo 3: Texto sobre Situações Didáticas

SITUAÇÕES DIDÁTICAS

José Luiz Magalhães de Freitas (p.65 -87)

Introdução

O que descrevemos neste capítulo é uma análise das diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático ao aluno através da chamada *teoria das situações didáticas.* Trata-se de uma descrição fortemente inspirada no modelo teórico desenvolvido na França por Brousseau (1986), com o qual procuramos melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da matemática principalmente no que diz respeito à nossa realidade educacional. Nosso interesse por essa análise se deve ao fato de que, entre as várias teorias pedagógicas, desenvolvidas nas últimas décadas, a grande maioria aborda aspectos excessivamente gerais que não contemplam a especificidade do saber matemático.

No entanto a teoria desenvolvida por Brousseau representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e conhecimento matemático. Todo esse procedimento didático visa principalmente realizar uma educação matemática mais significativa para o aluno. Esse significado consiste basicamente em proporcionar ao aluno um conhecimento que esteja realmente vinculado ao processo de sua promoção existencial. Este é o princípio básico que deve conduzir toda essa análise didática. A busca desse significado leva-nos então à reflexão sobre a forma com que podemos conceber e apresentar ao aluno o conteúdo matemático escolar. É sobretudo na especificidade do saber matemático que reside o centro desse desafio.

De início é preciso observar que essa questão não pode ser resolvida exclusivamente com o referencial teórico da própria matemática. Pois, quando o conteúdo matemático é apresentado isoladamente do mundo do aluno, torna-se desprovido da verdadeira expressão educativa. Sem esse vínculo com a realidade fica impossível possibilitar um processo autêntico de transformação pela aprendizagem. Uma das questões primordiais desse vínculo é pois a forma de apresentação do conhecimento num contexto que proporcione ao aluno um verdadeiro sentido. É preciso portanto destacar a necessidade permanente de reflexão sobre os valores educativos da matemática.

A noção de Situação Didática

O significado do saber matemático escolar para o aluno é fortemente influenciado pela forma didática com que o conteúdo lhe é apresentado. O envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem através de uma *situacão didática.* Segundo definição dada por Brousseau (1986):

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição... o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes.

Na realidade, na estrutura teórica dessas situações didáticas é possível relacionar uma diversidade de noções entre as quais podemos destacar contrato didático, obstáculos epistemológicos, dialética ferramenta-objeto, transposição didática entre outras. Por exemplo, toda situação didática é regida por um determinado tipo de contrato didático, ou seja, um conjunto de obrigações implícitas e explícitas relativas a um saber entreposto entre o professor e os alunos. Através da análise das situações didáticas é possível investigar toda a problemática da aprendizagem matemática e desvelar aspectos que ocorrem durante a resolução de problemas e a elaboração de conceitos pelos alunos.

É evidente que não se trata de simplesmente tentar reproduzir o ambiente científico em que o saber foi originalmente estabelecido e nem tampouco teatralizar urna redução do trabalho do matemático. A idéia pedagógica de trabalhar com as aparentes facilidades de uma redescoberta do conhecimento não é tão fácil de ser colocada em prática e somente faz sentido num quadro muito bem refletido. Tudo indica que talvez um dos grandes equívocos encontrados no ensino da matemática seja aquele de pensar que sua prática educativa se reduziria a uma simples reprodução, em menor escala, do contexto do trabalho científico. A especificidade educativa da matemática na prática pedagógica tradicional ou é simplesmente desconsiderada ou canalizada exclusivamente para os aspectos científicos. A essência do trabalho didático consiste, ao contrário, em construir situações artificiais no quadro de suas condições pedagógicas.

Segundo essa concepção o professor deve efetuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas a *devolução* de um bom problema. A devolução aqui tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução do problema, ou seja, se ele aceita participar desse desafio intelectual e se ele consegue sucesso nesse seu empreendimento, então inicia-se o processo de aprendizagem. É evidente que, entre a devolução do problema e a efetiva aprendizagem, diversas etapas são percorridas. E necessário portanto a análise de certos tipos particulares de situações didáticas, que permitam essa progressão de aprendizagem.

Essa progressão é, em última análise, o grande desafio pedagógico que estamos tentando abordar. Nela há a interferência de diversas variáveis, algumas sobre as quais o professor não tem nem um controle e outras que são razoavelmente controláveis pela ação didática. Na perspectiva de melhor compreender as variáveis sobre as quais o professor não tem um controle direto, se faz necessário apresentar a noção de situação a-didática de Brousseau. Uma situação a-didática se caracteriza essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de forma independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto por parte do professor. Na definição dada por Brousseau (1986):

> Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação a-didática.

É possível reconhecer uma certa ambigüidade no uso dessa expressão quando ela é compreendida como definindo uma etapa na qual a intenção de ensinar não tem nenhuma influência. Ambigüidade no sentido de que ela representa um fenômeno que está fora do controle didático e é, ao mesmo tempo, uma noção de grande importância para a didática. Na realidade, a intenção pedagógica caracteriza todas as etapas do processo didático, uma vez que todo o trabalho do professor é previamente determinados por objetivos e metas preestabelecidas. O aluno pode fazer investigações matemáticas, independente do sistema educativo ou da intenção pedagógica do professor e, mesmo assim, não deixa de estar vivenciando situações a-didáticas.

Brousseau analisa igualmente um tipo particular de aprendizagem que ele chamou de aprendizagem por adaptação na qual o aluno sempre se defronta com a necessidade de adequar o seu conhecimento a um determinado problema que lhe foi colocado no quadro de uma situação didática. Em contraposição a esta adaptação esta a aprendizagem formal que procura sobrepor a memorização, a técnica e os processos de automatismo à compreensão verdadeira das idéias matemáticas. Nessa aprendizagem a atitude radical está na redução do ensino ao aspecto formal da matemática, que, embora tenha sua função na aprendizagem, não pode em si representar a essência do conhecimento.

As situações a-didáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso dos alunos nas mesmas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar um conhecimento. Neste sentido não podem ser confundidas com as chamadas situações não-didáticas, que são aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem. Nesse caso o problema surge de forma eventual na vivência pessoal do sujeito. Observamos então que a escolha do problema pelo professor é uma parte importante de uma situação mais ampla planejada com fins pedagógicos, na qual pode ocorrer uma ou mais *situações a-didáticas*. Desta forma o professor e o aluno estão implicados num conjunto de relações, que envolvem uma diversidade d conceitos, em busca da síntese de um determinado conhecimento. Assim, entre as diversas situações a-didáticas existentes, uma se caracteriza como sendo a síntese do conhecimento. Toda a atividade pedagógica deve ser planejada pelo professor no sentido de direcionar o aluno para o principal que é a situação a-didática.

Em suma, toda vez que for possível caracterizar uma intenção, por parte do professor, de orientação de um aluno para a aprendizagem pode-se induzir a existência de uma situação didática. Além disso é necessário que haja também mecanismos socialmente instituídos para que isto possa se realizar. Isto está diretamente associado com a proposta positivista no sentido em que esta se caracteriza pela intenção de colocar o aluno numa situação que envolve a produção de conhecimento. Esta produção pode também envolver adaptações, reformulações ou mesmo a geração de conflitos com conhecimentos anteriores.

Situações Didáticas e resolução de problemas

Para melhor, compreender as correlações existentes entre as situações didáticas é as atividades de resolução de problemas, devemos, de início, refletir a propósito da diferença que há entre uma situação de ensino, entendida no sentido da prática pedagógica tradicional, e a noção que constitui o nosso objeto de estudo. Esta reflexão é essencial no desenvolvimento de nossas considerações, pois, se não houvesse diferença entre essas duas formas de estruturar o ensino da matemática, é evidente que o estudo das situações didáticas perderia seu interesse pedagógico. Acreditamos que, uma vez estabelecida uma intenção de ensino, através da resolução de um problema, é principalmente a presença, a valorização e a funcionalidade de situações a-didáticas no transcorrer de uma situação didática que diferenciam fundamentalmente essas duas formas de ensinar. No processo de ensino-aprendizagem deve haver condições para que o aluno realize ele mesmo suas a aproximações, mobilize seus conhecimentos e seja capaz de explicitar seus procedimentos e raciocínios utilizados.

Acreditamos que, no caso da matemática, a concepção de aprendizagem se torna evidente quando se analisam as situações didáticas relativas ao trabalho com a resolução de situações-problema. Assim sendo, a especificidade do aprendizado da matemática é determinada, em grande parte, por esse tipo de atividade intelectual. Da mesma forma que é possível identificar a existência de um problema na gênese do desenvolvimento histórico das principais idéias matemáticas, o mesmo pode ocorrer no contexto educacional. Nesse caso, o trabalho com a resolução de problemas deve se constituir no verdadeiro eixo condutor de toda a atividade educacional dessa disciplina.

Verificamos então que, de maneira geral, em quase todo trabalho de educação matemática, a elaboração do saber envolve algum tipo de problema. O processo de construção do conhecimento matemático não se reduz a dar "boas respostas", mas também a elaborar "boas questões". Há toda uma série de dificuldades específicas no trabalho didático com problemas e o saber certamente não é uma conseqüência imediata da associação de respostas aos problemas. Nem toda associação desse tipo pode ser considerada uma aprendizagem significativa, pois pode se referir a um plano ingênuo do simples condicionamento. No entanto, numa perspectiva construtivista, o papel principal do professor deve ser o de encontrar problemas adequados que possam provocar a mobilização de conhecimentos pelo aluno impulsionando-o para a elaboração e novos saberes matemáticos.

Quanto à prática pedagógica, portanto, não se trata de permanecer no nível da "transmissão de um conhecimento", deve-se sobretudo trabalhar com a apresentação e coma devolução de bons problemas. Se o aluno consegue uma boa resolução do problema, pode-se concluir que ele possui um determinado conhecimento, caso contrário, é sinal de que ele precisa evoluir para atender às expectativas do contexto. Essa aprendizagem pode dar-se em vários níveis, desde a obtenção de alguns dados passando pela necessidade de uma simples informação ou até mesmo de um conhecimento mais elaborado. Para isso surge uma necessidade de ensino sistematizado, formal e pedagogicamente organizado. Chega-se então às questões de ordem metodológica.

O aluno deve estar sempre sendo estimulado a tentar superar, por seu próprio esforço, certas passagens que conduzem o raciocínio na direção de sua aprendizagem. São essas inferências dedutivas, indutivas e as informações que o aluno mobiliza, realizadas sem o controle pedagógico explícito do professor, que caracterizam as chamadas situações a-didáticas. Surge então, para o aluno, a necessidade da superação intelectual de algumas condicionantes e de informações que não lhe foram fornecidas. Esses procedimentos de raciocínio são cruciais no desenrolar de uma aprendizagem mais autêntica. Enfatizamos que, nessa teoria, o aluno deve ser permanentemente provocado a se engajar em trabalhos de investigação e evoluir pelo seu próprio mérito, ao longo de todo processo educativo.

Numa determinada situação didática, o aluno quase sempre sabe que mesmo não havendo explicitação, por parte do professor, de uma intenção pedagógica, ela está presente ao longo de todo o processo. Esta é uma regra permanente do jogo pedagógico, ou seja, em qualquer situação sempre há um objeto de aprendizagem em questão. Assim, na prática educativa, o ponto decisivo é não anular esse quadro peculiar, onde é tratada a situação didática. Nunca se pode ignorar que essa situação deva ter um desenvolvimento e que, num determinado momento dela, a intenção didática deva ser colocada o mais distante possível. Dizendo de outra forma, devemos possibilitar ao aluno ao máximo de independência para que ele possa' desenvolver autenticamente seus próprios mecanismos de resolução do problema, através de suas elaborações de conceitos. É evidente que não se trata de nenhuma forma de abandono ou desleixo, por parte do professor; pelo contrário, a estruturação didática de tais situações é antes de tudo um desafio não trivial.

Nesta abordagem pedagógica, de natureza essencialmente construtivista, há uma difícil questão a ser superada pelo professor que é a necessidade de encontrar um equilíbrio na quantidade de informações que deve ser passada ao aluno. O objetivo é sempre que ele possa ativamente reelaborar idéias básicas de seu conhecimento. Se estas informações forem insuficientes é de se esperar que o aluno não consiga desencadear o seu processo de elaboração cognitiva. Por outro lado, se as informações forem passadas em excesso, estará fatalmente praticando os mesmos erros da forma tradicional de ensinar.Desta forma esboçam-se duas posições didáticas extremadas e igualmente ingênuas: numa delas o professor se ausenta do quadro pedagógico deixa o aluno em busca de tentativas aleatórias, o que, certamente, descaracteriza a atividade escolar; na outra, o essencial do raciocínio é repassado precipitadamente ao aluno. Tudo indica que o ideal a ser perseguido representa, na realidade, o equilíbrio entre essas duas posições radicais.

A primeira postura é não esperar a possibilidade de existência de um método geral e exclusivo para superar definitivamente essas duas posições extremadas. Pensamos que cada situação pedagógica deva ser tratada especificamente. Do ponto de vista epistemológico, situações didáticas particulares levariam à necessidade de discutir as condicionantes também particulares, o que explicaria, em parte, o motivo pelo qual o conhecimento didático se desenvolve tão lentamente diante dos desafios existentes. Por outro lado, esta maneira de conceber a prática educativa pode conduzir a caminhos bem diferentes da proposta tradicional de ensinar matemática. Antes de·tudo é necessário uma certa coragem para adaptar as novas situações, da mesma forma em que será necessário repensar a natureza do conhecimento produzido por esta metodologia de ensino. Estes conhecimentos serão, algumas vezes, carregados de sentido particular, ou seja, relativos ao problema estudado. Eles poderão estar profundamente marcados pelo aspecto experimental a ponto de não alcançarem a essência teórica da matemática.

Como a produção de conhecimentos nessas situações a-didáticas é geralmente muito ampla, faz-se necessário uma fase de institucionalização do saber que deve ser conduzida pelo professor. Esta fase visa dar o "acabamento" ao conhecimento elaborado pelo aluno ou mesmo trabalhar no sentido de descartar possíveis aspectos não valorizados na perspectiva do saber socialmente formalizado.

Finalmente, poderíamos pensar em formas de enriquecimento do nosso trabalho pedagógico por meio do planejamento de situações didáticas que sejam potencialmente ricas no aspecto a-didático. É evidente que esse trabalho é de fundamental importância para possibilitar uma abordagem construtivista do saber matemático. Acreditamos que o professor, que conhece com profundidade os conteúdos matemáticos e os alunos com os quais pretende trabalhar, saberá preparar e conduzir problematizações adequadas e compatíveis com esse referencial teórico. Não vamos trabalhar aqui como esse trabalho poderia ser feito, há outro capítulo abordando esse assunto, no entanto vale ressaltar que toda vez que ocorre a devolução de um problema, o aluno se engaja na busca de solução. Nesse sentido, poderão ser utilizados recursos didáticos variados, por exemplo: problematização matemática a partir da exploração de material concreto de manipulação ou de situações problema contextualizadas; desafios matemáticos com o uso de programas computacionais que sejam potencialmente ricos; desenvolvimento de atividades baseadas em seqüências didáticas previamente elaboradas pelo professor, entre outras; enfim há um grande número de problemas e opções que possibilita um aumento considerável das situações a-didáticas. Desta forma, uma atividade matemática seria tão melhor quanto mais favorecesse o aparecimento de situações a-didáticas. Através delas o aluno, ao tentar resolver os problemas, tem diante de si um grande número de possibilidades e de decisões que certamente estão fora de um controle direto do professor. Essa multiplicidade de opções é que norteia a aprendizagem do aluno.

Tipologia das Situações Didáticas

O que impulsiona o processo de ensino-aprendizagem matemática são as atividades envolvendo a resolução problema. O trabalho pedagógico tem início exatamente com escolha de um bom problema que deve ser compatível com o nível de conhecimento do aluno. Só o professor pode realizar essa tarefa que é essencialmente uma questão técnica, pois é ele quem tem as condições de conhecer os alunos e a realidade de sala de aula. Levando em consideração que o saber tem diversos níveis e funcionalidade, dependendo do problema e dos conceitos utilizados, é de se esperar que o conhecimento elaborado pelo aluno seja diferente segundo cada caso. Para descrever as relações do aluno com essa diversidade de possibilidade de utilização do saber, Brousseau desenvolveu uma tipologia de situações didáticas, analisando as principais atividades específicas da aprendizagem da matemática, Entretanto é necessário observar que essas categorias de situações se entrelaçam fortemente umas em relação às outras. A descrição que fazemos é principalmente para possibilitar uma análise de certos aspectos fundamentais e não para induzir uma possível separação nítida entre elas.

Situações de ação

Um determinado contexto .de aprendizagem é uma situação de ação quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema., realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional. muitas vezes essas ações podem estar fundamentadas em modelos teóricos que o aluno pode tentar ou não explicitar. Entretanto o essencial desta situação não é a explicitação de nenhum argumento de natureza teórica. É o caso em que o aluno fornece uma solução, mas muitas vezes não explícita ou argumenta os mecanismos utilizados na sua elaboração. A explicitação dos modelos teóricos, dos argumentos, das justificativas para as ações realizadas não é necessariamente feita pelo aluno. Na estruturação de uma dessas situações o professor escolhe alguns dados convenientes para que o aluno tenha condições de agir e assim buscar a solução de um determinado problema. Numa situação de ação há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento. Este é o caso, por exemplo, quando na solução de um problema de construção geométrica o aluno se contenta com uma solução apresentada exclusivamente através da realização de um desenho utilizando régua e compasso. Ele realiza uma ação de natureza mais experimental sem no entanto se preocupar com a explicitação de um resultado teórico que esclareça ou justifique a validade de sua resposta.

Situações de formulação

Numa situação de formulação o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria. Nestas situações de formulação o saber não tem uma função de justificação e de controle das ações. O aluno pode tentar explicitar suas justificativas, mas isto não seria essencial para caracterizar este tipo de situação. Trata-se do caso em que o aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação. Portanto essas situações são caracterizadas pelo fato de não indicar explicitamente os porquês da validade e de não estar sendo cobrado a fazê-lo.

Para que o aluno avance na resolução de um problema é necessário que ele aprofunde sua atitude reflexiva. Numa situação a-didática de ação, quando o aluno começa a buscar justificativas sobre a validade das afirmações formuladas, mesmo que dê forma interiorizada, ele estará numa condição limite, adentrando um novo tipo de situação didática. Nesse caso, o professor é naturalmente tentando a querer que o aluno se engaje nesse outro nível de raciocínio, mais voltado para os porquês, a certeza, a ausência de contradições, que caracteriza a essência do pensamento matemático.

Situações de validação

As situações de validação são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e onde o saber é usado com esta finalidade. Essas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade. Elas podem ainda servir para contestar ou mesmo rejeitar proposições. O trabalho do aluno não se refere somente às informações em torno do conhecimento, mas sim a certas afirmações, elaborações, declarações no propósito deste conhecimento. Nestas situações é preciso elaborar algum tipo de prova daquilo que já se afirmou de outra forma pela ação. Este é o objetivo que caracteriza as situações de validação. A propósito dessas situações julgamos oportuno destacar o trabalho desenvolvido por Balacheff (1988), no qual ele define vários conceitos associados à validação, buscando um significado mais preciso para noções tais como processo de validação, explicação, prova e demonstração.

Com base na análise descrita por Balacheff podemos dizer que um processo de validação se caracteriza principalmente como uma atividade que tem como finalidade assegurar a validade de uma dada proposição matemática podendo ainda consistir na produção de uma explicação teórica.

Já uma explicação seria caracterizada por um tipo de discurso que tem por finalidade tomar um conhecimento compreensível a uma outra pessoa. Trata-se do caso em que a verdade da proposição envolvida no conhecimento já é aceita por aquele que está anunciando este saber. Aquele que faz uma explicação já está convencido da validade daquilo que afirma, sem, entretanto ser compartilhado por aquele que recebe tais afirmações.

A noção de prova está associada a uma determinada situação particular quando uma dada explicação é reconhecida e aceita por certo grupo de pessoas num momento preciso e particular. Assim a validade restrita do conhecimento, nesse contexto da prova, já não depende exclusivamente daquele que faz sua afirmação. O conhecimento passa a ser compartilhado e confirmado por outros além daquele que apresenta a prova. É evidente que não podemos identificar uma prova, no sentido que acabamos de descrever, com uma demonstração matemática.

As demonstrações são determinados tipos de provas aceitas pelos paradigmas da comunidade dos matemáticos. A estrutura de uma demonstração se constitui numa seqüência de deduções lógicas formais através de regras bem definidas, apoiando-se em proposições verdadeiras, que permitem concluir a verdade de uma dada proposição. Na origem dessas deduções estão algumas proposições cuja validade é admitida como evidente por si mesma.

Apesar dos estudos feitos por Balacheff não estarem voltados diretamente à evolução histórica dos tipos de provas, ele retoma a tese de Lakatos (1976) ao considerar que o desenvolvimento da matemática se dá através de um processo heurístico de provas e de refutações. Em particular, a produção de um contra-exemplo não implica sempre a refutação de uma afirmação, mas também pode aperfeiçoar a conjectura, rejeitar o contra-exemplo ou ainda aprimorar mais uma definição.

É necessário destacar que-a atividade de validação é indissociável da de formulação. De fato, a produção de provas necessita que seja constituído um sistema comum de validação, através de uma linguagem oral ou escrita, no seio de um grupo social, mesmo se restrito a apenas dois indivíduos. Tanto na situação de formulação como na de validação matemática, pode-se recorrer a dois tipos de linguagem: a natural e a simbólica. O mais comum é que o aluno faça uso simultâneo das duas formas, expressando-se assim numa linguagem híbrida.

Muitas dificuldades encontradas na produção de provas podem estar associadas ao domínio insuficiente da linguagem simbólica formal da matemática.

Situações de institucionalização

As situações de institucionalização visam estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. O saber tem assim uma função de referência cultural que extrapola o contexto pessoal e localizado. O conhecimento deverá portanto ter para o aluno e para a sociedade um status mais universal do que aquela limitação imposta pela particularidade do problema estudado. Este conhecimento deve ser aceito pelo meio social. A necessidade destas situações de institucionalização se justifica diante da exigência de se fixar, por uma convenção, o estatuto cognitivo de um conhecimento. Além disso é preciso também explicitar esse conhecimento para sua funcionalidade em situações posteriores. Ás situações de institucionalização exigem, por exemplo, adaptações do contrato didático, visto que a tarefa do aluno é diferente em cada uma delas.

Suponhamos que o aluno consiga resolver um problema que lhe foi colocado e que consiga ter certeza de que sua reposta está correta sem recorrer ao professor. Nesse caso, mesmo reconhecendo um esforço reconstrutivo pessoal, dificilmente o identificará, por si só, como um conhecimento novo. Torna-se necessário o reconhecimento externo, conferindo-lhe um tipo de validade cultural. Enfim, cabe ao professor organizar essa síntese do conhecimento procurando elevá-la a um status de saber que não dependa mais dos aspectos subjetivos e particulares. Se faz necessário igualmente estabelecer as devidas correlações com outros saberes, essas sínteses são necessárias para que possam ser reinvestidas em outras situações. Ao visar a institucionalização de. determinados saberes que considera importantes, o professor seleciona questões essenciais para a apropriação de um saber formal a ser incorporado como patrimônio cultural.

Uma síntese voltada para a metodologia de ensino

O objetivo principal da educação matemática não é só a valorização exclusiva do conteúdo, mas, acima de tudo, é também a promoção existencial do aluno através do saber matemático. Nessas condições o significado do saber escolar para o aluno é uma questão fundamental para o processo educativo da matemática. As situações didáticas possibilitam uma melhor definição desse significado do conhecimento para o aluno. Elas podem ainda ser planejadas adequadamente pelo professor, o que leva necessariamente às questões de ordem metodológica.

Tudo indica que, para viabilizar um olhar que contemple a teoria das situações didáticas, o mais recomendável são os procedimentos metodológicos em que o professor não forneça ele mesmo a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração do conhecimento. Quando o aluno desenvolve uma aprendizagem nesse sentido, ele ~ capaz de efetivamente construir novos conhecimentos a partir de suas experiências pessoais, de sua própria interação com o meio, mesmo que esse meio não esteja adequadamente organizado com uma final idade educacional. A princípio, tudo indica que qualquer método que possa permitir a construção de boas respostas, que possam resultar em ações favoráveis, e plenamente aceitável. Trata-se de associar boas respostas às questões colocadas numa dada situação de aprendizagem.

Na prática pedagógica do ensino da matemática as situações didáticas podem ser trabalhadas através de uma abordagem metodológica socrática. Esse método tem como princípio básico a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos, que deverão brotar por meio de questionamentos adequados. O método utilizado por Sócrates consistia na condução de várias questões, dirigidas a seus discípulos, de forma que eles pudessem exercitar um autêntico diálogo de aprendizagem. Assim, com o desenvolvimento do diálogo, o discípulo realiza um processo de apropriação do conhecimento. O mestre não lançava mão de sua sabedoria para Impor o conhecimento, pelo contrário, tinha uma habilidade extrema para conduzir os discípulos na busca do saber. É evidente que não se trata de reproduzir, no contexto escolar, exatamente o método usado por Sócrates. Mas é acima de tudo a sua atitude pedagógica que deve inspirar a prática de conceder, nos limites das possibilidades, a oportunidade para que o aluno elabore o seu próprio conhecimento. Nesse sentido é importante lembrar que há sempre uma restrição à formulação de questões, ou seja, é fundamental que o aluno possa responder, por ele mesmo, às questões que lhe forem apresentadas.

A abordagem construtivista fornece uma expressão semelhante a esta que acabamos de descrever, quando propõe uma teoria da assimilação e acomodação em busca de uma situação de equilíbrio na aprendizagem. No processo de aprendizagem da psicologia genética de Piaget, o aluno sempre aprende através de uma adaptação a um meio que é fator de contradição e dificuldade. Nesta teoria as interações do aluno com o meio, ou com a situação didática, são bem mais complexas. É -importante observar que é necessário ocorrer um desequilíbrio para que o aluno possa reorganizar seu pensamento na construção do seu saber. Este saber é então resultado de uma adaptação do aluno que consegue novas respostas, a uma situação que anteriormente ele não dominava. Quando ocorre esta adaptação dizemos que ocorreu uma aprendizagem.

De forma totalmente oposta às concepções de aprendizagem fundamentadas na teoria de Piaget ou no método de Sócrates está o método tradicional. Este método, que está vivamente presente no ensino da matemática, em supervisão radical, sustenta o ingênua esperança de que o aluno pode aprender apenas memorizando regras, fórmulas e algoritmos, que são aprendidos exclusivamente pela memorização. Nessa prática tradicional parece que o professor é o fornecedor do conhecimento e o aluno um simples receptor. A aprendizagem aconteceria de uma forma "natural", seria uma conseqüência exclusiva do aspecto do próprio saber matemático, em que a própria metodologia de ensino já é identificada ao método da elaboração lógico-dedutiva do conhecimento matemático.

Bibliografia

ASTOLFI, J. P. e DEVELAY, M. A didática das ciências. Campinas, Papirus, 1990.

BACHELARD, G. A filosofia do não; o novo espírito científico: a prática do espaço. São Paulo, Abril Cultural, 1978.

___________O -racionalismo aplicado. Rio de Janeiro, Zahar, 1987.

"BALACHEFF, N. Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Thèse, Grenoble, Université J. Fourier, 1988.

BROUSSEAU,· G._Fondements et·méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactiques des Mathématiques .. v.7, nº 2, pp. 33-116. Grenoble, 1986.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique:- le milieu. Recherches en Didactiques des Mathématiques. v.9, n° 3, pp. 309-336, Grenoble, 1988.

BRIJN, J. et aUi. Didactique des Mathématiques. Lausanne-Paris, Delachaux et Niestlé, 1996.

JOSHUA, S. e DUPIN, J. J. lnrroductíon à la didactique des sciences et des mathérnatiques. Paris, Presses Universitaires de France, 1993.

LAKATOS, L A lógica do descobrimento matemático - provas e refutações. Ensaio sobre a lógica do descobrimento científico. Rio de Janeiro, Zahar, 1978.

TORANZOS, L Ensenanza de Ia matemática, Buenos Aires, Kape1usz, 1963.

VYGOTSKY, L. Pensamento e linguagem. 2a ed., São Paulo. Martins Fontes, 1989.

ANEXO 4

Anexo 4 – Artigo: O Uso do Ciclo da Experiência de Kelly como Implementador de uma Prática de Ensino para Licenciandos em Matemática

José Arimatéa Rocha
Heloísa F. B. N. Bastos, PhD.
Claúdia H. Dezotti, PhD.

Resumo

Neste artigo descrevemos a utilização do Ciclo da Experiência de Kelly para implementar uma prática de ensino de combinatória para alunos de licenciatura em matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Os resultados obtidos mostram que o ciclo kellyano possibilita práticas que induzem o raciocínio reflexivo por parte dos alunos e a interação entre eles.
Palavras-Chaves: Combinatória, Teoria dos Construtos Pessoais, Ciclo da Experiência de Kelly.

Abstract

In this article, we describe the use of Kelly's Experience Cicle to implement a teaching practice with Mathematic students of the Universidade Federal Rural de Pernambuco. The results show that the Kellian Cicle allows practices that induce reflective thought by students and interaction among them.
Key Words: Combinatory, Kellian Experience Cicle, Personal Construct Theory.

Atualmente, a concepção de educação como construção humana, baseada em posturas filosóficas de diversas perspectivas epistemológicas, tem gerado teorias que se propõem a descrever condicionantes para essas construções. Tais teorias determinam vários focos de análise relativos ao processo ensino-aprendizagem, os quais abordam questões concernentes ao trio aluno x saber x professor ou aos vários ambientes em que cada um desses elementos (ou de sua reunião) se coloca. Em vista disso, um novo campo do saber humano tem tomado forma, a partir da necessidade de determinar ações para o ensino de matemática com base científica: A Educação Matemática.
Dentre todos os objetos de estudo dessa disciplina, destaca-se aquele dedicado à formação do professor de matemática. D'Ambrósio cita uma pesquisa realizada por professores da UnB[7] em que foram elaboradas várias diretrizes para abranger tal objeto.

Dentre elas, colocou-se os "estudos de como desenvolver, no futuro professor, conhecimentos substanciais e integrados, dentro da sua área de como ele poderá desenvolver esses conhecimentos e quais nos futuros alunos" (1993 p. 14).

Por outro lado para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), um dos objetivos do Ensino Médio é o de "Desenvolver as capacidades de raciocínio e de resolução de problemas...". (BRASIL, 1999, p.254). Ora, uma das maiores classes de problemas que surge em matemática é a dos chamados problemas combinatórios. Esses, por sua vez, então na base da teoria da probabilidade, uma das mais importantes teorias matemáticas do ponto de vista de sua aplicação. Pode-se afirmar que não há nenhum ramo da ciência moderna a não fazer uso dos

---
[7] Universidade de Brasília

cálculos combinatórios e probabilísticos. Este fato evidencia-se pela introdução de seu conteúdo na formação de biólogos, físicos, químicos, matemáticos, economistas, engenheiros etc.

Recentemente, uma tendência notada é que cada vez mais o conteúdo das noções de Combinatória e Probabilidade tem se deslocado para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental. Esse deslocamento, apesar de embrionário, parece indicar a retomada do ponto central do ensino deste conteúdo, qual seja, aprendizagem da noção de contagem em seus diversos enfoques. Contudo em um estudo recente sobre a aprendizagem de Análise Combinatória por parte de licenciandos em matemática (ROCHA, 2006) comprovamos a necessidade de trabalhar tal conteúdo com tais sujeitos, futuros autores de seu ensino.

Nesse sentido, pensamos em desenvolver estudos visando apontar alternativas que respondessem à questão sobre novas técnicas de ensino para aquele conteúdo entre licenciandos em Matemática. Encontramos, no chamado Ciclo da Experiência de Kelly, (CEK) um "modus operandi" à altura de nossa preocupação inicial.

Neste artigo, objetivamos descrever o uso do CEK como implementador de técnicas educacionais para licenciandos em matemática de modo a permitir aprendizagem significativa em conteúdos matemáticos e seu ensino. No caso o conteúdo matemático trabalhado foi o de Análise Combinatória.

A seguir, descreveremos as bases teóricas da Teoria dos Construtos Pessoais de G. Kelly que suportam a construção do CEK, base de nossa pesquisa.

A Teoria

George A. Kelly foi graduado, em Matemática e Física, mestre em Sociologia Educacional e doutor em Psicologia tendo uma vasta experiência em hospitais psiquiátricos americanos. Em sua obra funde-se uma postura filosófica (o Alternativismo Construtivo), e uma teoria da personalidade, a Teoria dos Construtos Pessoais (TCP). O ponto de partida é o homem e o mundo em que se encontra. Para Kelly (1963), "o universo está realmente existindo e o homem está gradualmente compreendendo-o". Além disso, há por parte dele, a hipótese eminentemente física de que "o universo pode ser medido ao longo de uma dimensão temporal" (p.124). Ele vê o homem como um "homem-cientista", que busca prever e controlar o fluxo de eventos em seu entorno (MOREIRA, 1999).

Sua noção central é a de construto. Para ele os construtos são pautas de trabalho criadas pelo homem para a análise do mundo, são construções semelhantes àquelas criadas pelos cientistas como teorias explicativas em contínuo processo de evolução. Assim, por exemplo, um conceito como o de "ensinar combinatória" é visto por Kelly como multidimensionalmente formados por construtos que permeiam o conjunto de possibilidades que um professor desse conteúdo tem para criar suas pautas de trabalho quanto ao ato de efetivamente executar esse ensino. No quadro 1 resumimos a TCP, matematicamente organizada em um postulados e 11 corolários.

Quadro 1: Resumo da Teoria de Kelly **(Fonte: Adaptação de Moreira, 1999)**

POSTULADO FUNDAMENTAL: Os processos de uma pessoa são psicologicamente canalizados pelas maneiras nas quais ela antecipa os eventos.

Corolário da Construção: Uma pessoa antecipa os eventos construindo suas réplicas.	**Corolário da Individualidade:** As pessoas diferem umas das outras nas suas construções de eventos.
Corolário da Organização: Cada pessoa, caracteristicamente, desenvolve, para sua conveniência na antecipação de eventos, um sistema de construção incorporando relações ordinais entre construtos.	**Corolário da Escolha:** A pessoa escolhe para si aquela alternativa, em um construto dicotomizado, por meio da qual ela antecipa a maior possibilidade de extensão e definição de seu sistema de construção.
Corolário da Dicotomia: O sistema de construção de uma pessoa é composto de um número finito de construtos dicotômicos.	**Corolário do Âmbito:** Um construto é conveniente apenas para a antecipação de um âmbito limitado de eventos.
Corolário da Modulação: A variação no sistema de construção de uma pessoa é limitada pela permeabilidade dos construtos dentro dos âmbitos de experiência em que as variantes se situam.	**Corolário da Comunalidade:** Na medida em que uma pessoa em prega uma construção da experiência que é similar àquela empregada por outra pessoa, seus processos psicológicos são similares ao da outra pessoa.
Corolário da Fragmentação: Uma pessoa pode empregar, sucessivamente, uma variedade de subsistemas de construção que são inferencialmente incompatíveis entre si.	**Corolário da Sociabilidade:** Na medida em que uma pessoa constrói os processos de construção de outra, ela pode ter um papel em um processo social envolvendo a outra pessoa.
Corolário da Experiência: "O Sistema de Construção de uma pessoa varia quando ela sucessivamente constrói replicas de eventos	

Como notamos, seu postulado fundamental mostra o peso da metáfora do homem-cientista em sua teoria. O Corolário da Construção, por exemplo, menciona que as pessoas interpretam a realidade, fazem antecipação, elaboram suas construções mentais dessa realidade, de modo semelhante às abordagens dadas por cientistas em seu processo de investigação. Por sua vez, neste caminhar, cada cientista é único, embora possa compartilhar informações com outros colegas de pesquisa, paralelo para nós evidente com o que propõe o Corolário da Individualidade. Como modo de aplacar os conflitos que ocorrem nessa construção, as pessoas agrupam seus elementos -os construtos - segundo relações de ordenação ou subordinação (Corolário da Organização), formando um número finito de construções dicotômicas (Corolário da Dicotomia), escolhendo nessa dicotomia, aquele construto com o qual ele antecipa o maior número de eventos, segundo o Corolário da Escolha.

Por outro lado, cada construto tem um "locus" de atuação (Corolário de Âmbito) a cada momento, o sistema de construtos de uma pessoa varia em função de sua permeabilidade (admissão ou não de elementos novos), podendo ser fragmentado em subsistemas incompatíveis entre si (Corolário da Modulação e da Fragmentação). Os corolários acima apresentados parecem inseridos no contexto da internalidade de cada pessoa. A questão da interação entre pessoas é contemplada nos Corolários da Comunalidade e da Sociabilidade. Em nossa leitura da teoria de Kelly, as considerações sobre aprendizagem humana são melhor referidas quando consideramos o Corolário da Experiência, o qual passamos a destacar.

A teoria de Kelly não é, a princípio, voltada para considerações educativas. Ela é uma teoria da personalidade e como tal tem seu foco dirigido para o indivíduo, sua estruturação como pessoa.

A experiência é considerada por seu autor como resultado das sucessivas construções e reconstruções da pessoa, da perturbação de seus sistemas de construtos por esse processo. Essas variações podem dirigir o sistema a uma estabilidade, tornando-o mais resistente a uma modificação ou provocar novas variações no mesmo. Revisando, o corolário da experiência diz que "o sistema de construção de uma pessoa varia quando ela sucessivamente constrói réplicas de eventos" (KELLY, 1975 apud BASTOS, 1992, p. 17, tradução livre). Ou seja, as pessoas ajustam sua compreensão às realidades na medida da ocorrência de suas experiências. Na concepção kellyana, a aprendizagem ocorre segundo um ciclo, que é determinado por cinco momentos: Antecipação, Investimento, Encontro, Confirmação ou Refutação e Revisão Construtiva.

Este ciclo, chamado Ciclo da Experiência Kellyana (CEK), contém a essência da sua teoria, para o conceito de aprendizagem nos moldes construtivistas. Para Kelly "*Aprendizagem não é uma classe especial de processos psicológicos; ela é sinônima de cada um e de todos os processos psicológicos. Não é algo que ocorre com a pessoa ocasionalmente, mas o que a torna uma pessoa em primeiro lugar*". (Tradução Livre) (KELLY, 1963, p. 75). Ao longo de nosso percurso metodológico descreveremos também tais etapas do Ciclo Kellyano.

O Método

Nosso planejamento foi determinado pela preocupação de dirigir ações a serem executadas pelos alunos de modo que os permitissem refletir sobre o ato de ensinar aquele conteúdo, planejarem e apresentarem uma aula sobre ele, além de interagirem entre si sobre todo esse processo. As etapas do CEK deveriam ser planejadas nessa direção. A metáfora do homem-cientista proposta por Kelly, impõe-nos um modo de olhar o processo educativo como um todo uma vez que "o universo está realmente existindo e o homem está gradualmente compreendendo-o" (Moreira 1999). Esse fato nos obrigou a dirigir nossa ação na pesquisa de modo à constantemente estarmos revendo nossas observações sobre todo o processo.

Ainda mais, a concepção kellyana contra-ataca o determinismo vigente em certas teorias psicológicas de aprendizagem, que põem o homem como refém do meio. Para Kelly, o homem reconstrói sua visão de mundo, em um processo aproximativo de ajustes, segundo moldes (os construtos) hierarquizados e que podem ser compartilhados socialmente. Isso implicou em pensarmos ações para as etapas do Ciclo que permitissem o maior grau de sociabilização possível em cada etapa, privilegiando também a reflexão individual sobre a prática proposta.

Os sujeitos da intervenção foram os alunos da disciplina Fundamentos da Matemática, do 4º período do Curso de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco durante o semestre letivo de 2005.2. A turma era composta de 22 alunos (as), com idade entre 20 e 32 anos e foi submetida, ao longo do semestre, a um conteúdo que, partindo da Axiomática de Peano, descreveu os Naturais e em seguida fez a construção formal do Anel dos Inteiros. O conteúdo de Análise Combinatória foi introduzido como necessário após aplicarmos um pré-teste com os alunos sob o argumento de verificarmos suas aprendizagens em relação a problemas de contagem. Ele foi elaborado de modo que não contivesse termos da linguagem comum que permitissem interpretação dúbia, como pares, comissões, agrupamentos etc, tendo sido aplicado sem conhecimento prévio de sua realização, por parte da turma sob o argumento de investigar como ela se encontrava em relação àquele conteúdo tão importante para o ensino. Os resultados obtidos também foram usados para defender esta intervenção. Dessa forma, foi conduzido o processo de estabelecimento de um contrato pedagógico para a intervenção adequado à pesquisa, até onde podemos perceber. Tal pré-teste, em nossa intenção pedagógica, já era a primeira etapa da antecipação e consta no anexo I. Para Kelly a antecipação é o momento em que se deve desenvolver situações para que o aluno pense sobre as aprendizagens desejadas. Daí pensarmos como um outro momento desta etapa (Antecipação 2) uma Conferência participativa sobre minha experiência pessoal na aprendizagem e ensino da Combinatória e entrega dos textos para leitura. Tais textos foram o capítulo sobre Situações Didáticas do texto de Freitas (1999), o capítulo 3 da dissertação de

Dornelas (2004) sobre o uso do Princípio Multiplicativo na resolução de problemas, o artigo de Loureiro (1997) e os capítulos 22 e 23 da apostila do Projeto Rumo à Universidade[8] (2005). Devido ao tempo dedicado à intervenção, apenas o texto sobre situações didáticas foi discutido em classe como tarefa da etapa seguinte do CEK, sendo os demais textos considerados alternativos, no sentido de não haver de nossa parte obrigatoriedade de sua discussão.

A etapa do investimento foi dirigida para embasar os conhecimentos necessários para a etapa seguinte: o encontro com o acontecimento. Pensamos então:
<u>Investimento I:</u> aula tradicional sobre aquele conteúdo como modo de uniformizar a linguagem.
<u>Investimento II:</u> Distribuição e discussão do texto sobre situação didática em sala de aula e sensibilização para a leitura dos textos alternativos.
<u>Investimento III:</u> Estudos invidualizados sobre associação de problemas combinatórios usando como critério apresentarem mesmo tipo de solução.

No Encontro com o Acontecimento dividimos a turma em dois grupos chamados Grupo Mestre (GM) e Grupo Aluno (GA), em que o primeiro elaboraria uma atividade de ensino para o segundo, deixando-os livres para decidirem o formato em que eles dirigiriam sua ação para ensino daquele conteúdo.

<u>Confirmação ou Refutação:</u> é o momento em que se validará ou não a hipótese sobre o evento. Decidimos aplicar as questões do pré-teste como pós-teste.

Na Revisão Construtiva pretende-se sedimentar os conhecimentos obtidos pelos alunos. Encarregamos GM e GA de elaborarem cada um, uma avaliação objetivando que cada um verificasse a compreensão que o outro tinha do conteúdo trabalhado.

A intervenção ocorreu após estudarmos as conseqüências da axiomática de Peano para os Naturais e se deu conforme calendário da disciplina, em que cada etapa durou o tempo normal de aula (1 hora e 40 minutos). Nosso pressuposto metodológico básico foi de que o formato dado pelo CEK fornecia uma estruturação para que os sujeitos, ambientados segundo suas etapas e com o propósito de refletirem sobre suas ações de ensino, elaborassem um plano de ensino e apresentassem uma aula, agindo como se professores fossem, construindo assim uma aprendizagem significativa sobre resolução de problemas combinatórios. Ressaltamos ainda que o caráter qualitativo da pesquisa enfatizou nossa visão do conhecimento, a qual prioriza procedimentos descritivos que, pela sua subjetividade e dinamicidade, produzam uma compreensão contingente e negociada. Nesse sentido, os dados quantitativos foram considerados de forma crítica, na direção do trabalho de Bogdan e Biklen (1994).

Resultados

• *Antecipação (Primeira Parte)*
Participaram do pré-teste 16 alunos dos quais selecionamos sete para análise, nomeados pelas letras A, B, C, D, E, F e G. É importante ressaltar que o critério de escolha dos sujeitos foi o da participação em todas as fases da intervenção.

---

[8] "Rumo à Universidade" é um projeto criado através da parceria entre a Secretaria de Educação e Cultura de Pernambuco (Seduc-PE) com as universidades públicas do Estado que tem como objetivo aumentar o aprendizado do estudante, auxiliando o seu ingresso à universidade, através de aulas e simulados.

O pré-teste, elaborado com cinco questões de combinatória, sendo a primeira dividida em dois itens, mostrou-nos a necessidade da intervenção, devido ao relativamente pequeno acerto por questão no grupo pesquisado (em torno de 50%, retirando-se a questão 2, para a qual houve 71% de percentual de acertos). Em uma simulação de notas, supondo cada questão com peso 2, e considerando apenas certo ou errado, dois do sujeitos pesquisados tirariam nota zero, um tiraria nota quatro, um tiraria nota seis, um tiraria nota oito e dois tiraram nota dez, o que representa uma distribuição de notas aceitável, não fosse o fato de que aquele conteúdo deverá ser ensinado por aqueles sujeitos, futuros professores.

Consideradas as estratégias usadas para a resolução dos problemas no pré-teste, observamos ainda o caráter dominante do uso do Princípio Multiplicativo como estratégia mais escolhida. Seu uso como estratégia com sucesso na efetiva resolução dos problemas ficou para segundo lugar, mas esse fato é decorrente de que, em princípio, o uso dessa estratégia em todos os problemas demandaria um processo de "desconstrução" do princípio multiplicativo, no sentido que indicaremos mais adiante.

- *Antecipação (Segunda Parte)*

Na primeira fase do CEK as pessoas geram expectativas acerca dos eventos e levantam hipóteses a eles relacionadas. Daí, termos dirigido nossa intenção pedagógica nessa ocasião, para construir atividades que provocassem nos sujeitos expectativas sobre o ensino-aprendizagem da Combinatória.

Organizamos, então, uma apresentação de nossa experiência pessoal de ensino, enfocando nossas dificuldades iniciais naquele conteúdo, uma vez que não o tínhamos visto nos anos de ensino médio, nem em nossa formação na universidade. Indicamos ainda, as perspectivas para o seu desenvolvimento enquanto teoria matemática, sua relevância para o ensino, história e o modo como ele vem sendo ensinado. Fizemos isso nos moldes de uma aula estilo conferência participativa em 15/09/2005. Nessa ocasião, provocamos os alunos para que relatassem suas experiências sobre o tema, havendo como que uma concordância geral sobre sua importância para o ensino. Alguns alunos, contudo, reclamaram de falta de interação dele com outros meios de ensino, sendo sugerido, por exemplo, o uso do computador.

Ao final, colocamos nossa idéia de realizar uma intervenção em sala voltada para o ensino de combinatória, em que a turma simularia uma situação de ensino, elaborando um plano de ensino e apresentando uma aula sobre esse conteúdo, procedendo como se os alunos fossem professores-em-ação. Nossa atuação seria de supervisores do processo. Esclarecemos que não haveria prejuízo para o conteúdo da disciplina, pois, de qualquer forma, já havíamos previsto o ensino daquele conteúdo em nosso plano de curso.

Passamos uma ata solicitando uma confirmação ou não daqueles alunos interessados em participar do evento. Estavam presentes 22 alunos e todos concordaram com a idéia. Finalizamos distribuindo os textos previstos em nossa metodologia, destacando a importância da leitura do artigo sobre situações didáticas (FREITAS, 1999). Com isso, enfatizávamos nossa preocupação de que deveríamos sugerir ao grupo alguma possibilidade de discutir a didática, tomando como referencial a Teoria das Situações Didáticas (TSD) elaborada por Brousseau (1997).

- *Investimento*

Nos termos do CEK devemos considerar a fase de investimento como o momento para que os alunos fundamentem suas construções. De nossa perspectiva, e de acordo com a metodologia adotada, consideramos como relevante para essa fase salientar o formalismo do conteúdo trabalhado mostrando que sua essência estava no Princípio Multiplicativo, de onde derivavam as demonstrações das fórmulas de Arranjo, Combinação e Permutação. Durante a aula, com exceção do exemplo motivador do Princípio Multiplicativo, não foram resolvidos problemas de contagem. Tal tarefa foi confiada aos alunos, com a resolução dos problemas propostos nos textos distribuídos. Salientamos a pergunta clássica sobre ordem feita pelo Aluno B, que propicia a dicotomização Arranjos X Combinação, bem como a completa ausência de participação do resto da turma no sentido de questionar os conceitos e resultados vistos ou o processo de ensino elaborado. Reforçamos ainda, as leituras dos textos alternativos distribuídos com a turma (capítulo 3 da dissertação de Dornelas (2004) e o artigo de Loureiro (1997) sobre os sentidos da multiplicação).

Consideramos a segunda fase do investimento muito importante por acharmos nela uma possibilidade da ruptura do contrato tradicional que o ambiente da disciplina proporcionava. Daí termos organizamos a turma em círculo e após fazermos considerações gerais sobre a importância de uma teoria didática para o ensino de matemática caracterizamos a T.S.D. e passamos a discutir o texto sobre situações didáticas (FREITAS, 1999), a partir de uma leitura comentada com revezamento de leitor e freqüentes esclarecimentos dos termos e raciocínios usados pelo autor. Foram levantadas questões sobre a dificuldade de utilização da teoria por conta dos condicionantes externos ao processo de ensino (turmas grandes, excesso de carga horária, baixos salários). Replicamos com o argumento de que a existência de qualquer teoria científica não implica em um uso social imediato dela, mas sua inexistência implica na impossibilidade das mudanças possíveis por ela demandadas. Solicitamos dos alunos a preparação de um plano de ensino para aula do encontro com o acontecimento.

Como tarefa adicional para a terceira etapa do investimento, escolhemos uma que nos permitisse investigar os conhecimentos prévios dos sujeitos quanto às suas formas de categorizar as estratégias para a resolução de problemas combinatórios. Propusemos, então, que associassem dentre um grupo de dez problemas, aqueles que considerassem como tendo o mesmo tipo de solução. Pedimos ainda que justificassem a associação feita, explicando que as categorias obtidas não precisavam ser disjuntas (um mesmo problema poderia constar em duas ou mais associações. (Anexo II)). Note-se que tais problemas contêm conceitos da linguagem coloquial, ao contrário daqueles cobrados no pré-teste. Com isso, estávamos propondo um certo retorno aos problemas verbais, inserindo o contexto corrente dos livros didáticos sobre combinatória e impondo aos alunos uma situação próxima da realidade vivenciada pelos professores desse conteúdo. Gargalho & Cánovas (in MINGUET, 1998, p.169) citam que “deve formular-se a apresentação destas situações-problema como objetivo para ativação dos conhecimentos prévios que estão relacionados com o conteúdo conceitual das atividades de ensino-aprendizagem empreendidas”.

A categorização dos problemas exigida sabemos ser um problema difícil, até mesmo para professores experientes no conteúdo de ensino proposto. Entretanto, pensar sobre esse tipo de situação é mais uma forma para que os alunos reflitam sobre a sua ação, oferecendo diretrizes para que eles, incorporando as funções de professores, organizem suas situações de ensino. Essa é uma constatação em nossa experiência docente.

A análise prévia dos resultados obtidos nessa categorização mostra que a maior parte dos alunos (85,7%) determinou categorias disjuntas para as estratégias, fazendo verdadeiras partições do conjunto de problemas propostos. Um único aluno (G) incluiu um elo de ligação entre grupos de categorias diferentes.

- *Encontro com o Acontecimento*

Os construtos de uma pessoa são considerados, na abordagem kellyana, como hipóteses de trabalho, as quais, em um processo de revisão, sempre estão em confronto com suas experiências. Gargalho & Conovas (in MINGUET, 1998, p.54) propõem ser a própria experiência "conformada por construções sucessivas de acontecimentos".

Na terceira etapa do CEK, o indivíduo é levado a construir réplicas dos eventos, possibilitando ou não sua validação pelas suas estruturas internas de cognição. Na intervenção proposta em nosso estudo, esta etapa do ciclo já havia sido deflagrada quando solicitamos aos sujeitos que confeccionassem uma seqüência de ensino para a combinatória, o que está de acordo com a idéia de Kelly quanto à não disjunção das etapas do ciclo.

Em continuação ao cronograma da intervenção, ocorreu em seguida o "encontro com o acontecimento": uma aula dirigida e ministrada pelos sujeitos da pesquisa como se fossem "professores-em-ação".

Negociamos o processo na aula anterior ao encontro. Nela, ficou decidida a formação de dois grupos de trabalho: um dos grupos responsável por ministrar uma aula, como se fossem professores-em-ação aqui designado GM. O outro grupo, agindo como alunos-em-ação, aqui designado GA. Do grupo GM participaram os sujeitos A, F e D e outro Y, não pesquisado, mas que participou ativamente no dia do encontro. Estavam presentes 14 alunos, inclusos os sujeitos não pesquisados. Resumimos, no anexo IV, o que ocorreu nesse encontro. Como dados significativos consideramos inicialmente, a interação entre GM e GA, a qual coloca um dado novo na relação professor x aluno: em vez de dono do conhecimento, o professor, agora, torna-se parceiro do aluno para construí-lo.

Mais ainda, o comportamento participativo do GA é evidenciado também ao ser observado que seus componentes escreviam as soluções no caderno, comportando-se como se fossem "alunos-em-ação", havendo a confirmação de que aqueles sujeitos acataram esta fase do CEK. Houve, de fato, um "encontro com o acontecimento", mesmo por parte do grupo não pesquisado. No instante (16:10), encontramos na metáfora "desorganizar" usada por Y, a revelação de um sentido, para nós novo, no conceito de combinação.
A dinâmica usada por Y, qual seja a de escolher três alunos da sala para demonstrar como escolher dois deles de forma ordenada ou não, a participação ativa do GA, o uso insistente do termo desorganizar com a correspondente ação por parte dos alunos chamados para a dinâmica (A, B, e C), conduziu-nos a repensar a importância do adjetivo significativa posposto ao substantivo aprendizagem, ocorrendo aí o despertar do nosso olhar para o termo "desorganizar".

Encontramos nessa ocasião recomendações dadas por Lima (2004, p. 111) sobre o ensino de combinatória "aprenda e faça com que seus alunos aprendam com os erros".
Nas considerações levantadas por Y, nos instantes (25:00) e (26:00), notamos a preocupação de um professor sobre a pertinência do conteúdo abordado em relação ao quando fazê-lo: era um "professor-em-ação" questionando a si e a seus colegas sobre condicionantes desta ação. Tem-se aí, segundo nossa consideração, a essência do conceito de consistência do construto contido nos corolários da permeabilidade e da fragmentação da Teoria de Kelly, uma vez que Y estava implementando um padrão de conduta que incorporava a função de professor em suas dimensões cognitiva, comportamental e afetiva.

A participação do aluno B (25:05), a solução do aluno G (33:10) para uma classe de problemas excluída da nossa preocupação inicial (permutações com repetição) trouxe à tona a idéia de que o grupo tinha obtido um diferencial de compreensão de combinatória, suficiente para obter sucesso na realização do pós-teste! Isto é, enquanto pesquisadores engajados com a Teoria de Kelly, justificávamos naquele momento um dado para ele essencial: a antecipação de eventos como modo de canalizar nossas escolhas.

Finalmente, a participação do aluno A, ao assumir a condução da aula, ratifica o empenho do grupo quanto ao objetivo declarado para a intervenção: "trazer problemas de interesse para o aluno" (37:00) e remete-nos à idéia de contextualização do saber, enquanto que a consideração sobre a necessidade das fórmulas, para problemas com números muito grandes, dão à proposta de ensino do grupo GM, um todo coerente e indicativo de avanços na compreensão de combinatória por parte do grupo pesquisado. Essa confirmação ou não foi o objetivo da próxima etapa do CEK.

• *Confirmação ou Refutação*

Nesta fase da pesquisa usamos como instrumento de análise os mesmos problemas propostos no pré-teste da intervenção. Resumimos no Quadro 2, a seguir, os resultados obtidos, já em comparação com o pré-teste.

Quadro 2: Pré-Teste X Pós-Teste da Intervenção segundo CEK

PROBLEMAS	PRÉ-TESTE X PÓS-TESTE														%	
	A		B		C		D		E		F		G			
	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
1ª	T	R	T	R	T	R	R	R	R	R	T	R	R	R	42,6	100
1b	T	T	T	T	T	R	R	R	R	R	T	R	R	R	42,6	71
2	T	R	T	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	71	100
3	T	R	T	T	R	R	T	T	R	R	T	R	R	R	42,6	71
4	T	R	T	R	R	R	R	T	R	R	T	R	R	R	57	85,7
5	N	R	T	R	R	R	T	N	R	R	R	T	R	R	57	71
%	0%	83%	0%	67%	67%	100%	67%	50%	100%	100%	33%	83%	100%	100%		
Tempo gasto	39	20	20	26	38	20	25	21	29	39	29	21	18	24		

A análise dos resultados obtidos mostrou um desempenho melhor do grupo, em todos os problemas propostos, com exceção do aluno D. Ademais, o tempo total gasto na realização dos problemas pelo grupo diminuiu de 198 minutos para 171 minutos.
Os resultados por aluno mostram também avanços expressivos: A saltou de 0% de acertos no pré-teste para 100% no pós-teste. Enquanto B de 0% para 67%. Todos os demais alunos, exceto um, tiveram avanços ou permaneceram com seus resultados na passagem do pré-teste para o pós-teste.

• *Revisão Construtiva*
Durante o encontro com o acontecimento obtivemos indicativos de avanços na compreensão do conteúdo da intervenção, por parte dos alunos pesquisados. Na fase seguinte do CEK referendamos tal constatação. Isto é, a elaboração de seqüências didáticas, por parte do grupo pesquisado, e sua efetivação como prática de ensino, propiciaram avanços na construção do conhecimento em Combinatória dos sujeitos da pesquisa.

Para a última fase do CEK - a revisão construtiva - pensamos em como dirigir a pesquisa, de modo a consolidar tais avanços e a "aumentar o repertório de construtos" (KELLY, 1963, p. 9) dos alunos pesquisados. Estes, como nos referimos, estavam como se fossem "professores-em-ação".Daí, termos considerado uma ampliação do processo em curso, pondo os alunos em uma situação de ensino, fundamental nesse processo: o de elaborar um instrumento de avaliação.

No último encontro da intervenção, dividimos o grupo-classe em dois conjuntos de alunos de modo que os grupos GM e GA estivessem em conjuntos distintos. Em seguida, dirigindo-nos aos dois grupos, solicitamos que elaborassem um instrumento de avaliação do conteúdo trabalhado. Sugerimos, também, que esse instrumento contivesse quatro questões de resolução aberta, nos moldes do Pré-teste. Deixamos os grupos livres para direcionarem suas ações, limitando o tempo de elaboração em trinta minutos.
Observamos que, em cada conjunto de alunos, os grupos GM e GA tiveram participação ativa. O sujeito F escreveu a redação do conjunto de alunos em que GM estava incluso. Analogamente, C redigiu a avaliação proposta pelo conjunto de alunos em que GA se incluía. Cada conjunto de alunos elaborou, como instrumentos de avaliação, um teste com quatro problemas de resolução aberta, designados aqui por T_1 e T_2, respectivamente. O tempo gasto para tal elaboração foi de vinte minutos. Ato contínuo solicitamos que cada conjunto de alunos resolvesse o teste proposto pelo outro conjunto de alunos. (Os testes elaborados estão indicados no Anexo IV).

Deixamos o resto do tempo livre para que o conjunto de alunos elaborasse a solução dos problemas propostos. O grupo que redigiu a solução do T_1 gastou vinte dois minutos nesta resolução. O outro grupo de alunos gastou vinte e oito minutos para tal. Os alunos foram liberados após a entrega dos protocolos de resolução para nossa consideração e análise.

Discussão e Conclusões

Analisamos a compreensão dos conceitos de combinatória e seu uso por parte dos licenciandos, em uma situação em que se fez a simulação do que acontece, normalmente, no processo de ensino deste conteúdo. Caracterizamos, inicialmente, o ambiente em que tal situação ocorreria (no transcurso da disciplina Fundamentos da Matemática), os sujeitos sobre o quais investigaríamos a aprendizagem (os alunos da disciplina) e o procedimento metodológico adotado como suporte: o uso do CEK.

A aula, organizada pelo Grupo Mestre (GM) e a participação dos demais alunos, mostraram uma realidade bem mais dinâmica do que aquela vista na elaboração dos planos de aula: um todo integrado, com participação ativa dos sujeitos pesquisados e determinando significados para o processo de contagem, antes não observados pelo pesquisador: a idéia de desordenação associada à divisão análoga à idéia de ordenação associada à multiplicação. Foi instituída em aula um "princípio da divisibilidade" (para elaborarmos uma paródia com princípio multiplicativo).

O pós-teste mostrou claramente os avanços efetivados pelos sujeitos do grupo pesquisado, tanto na resolução por questão, por parte do grupo, quanto na realização da "prova" por cada aluno. O resultado negativo apresentado por D na questão 4 pode ser considerado como uma distração sua, tendo em vista suas soluções dadas a problemas semelhantes.

Na revisão construtiva tivemos a oportunidade de observar os sujeitos em situação de elaboração de uma prova. Ambas as provas elaboradas (T1 e T2) foram considerados como mais difíceis que o pós-teste, por três professores de matemática do ensino médio. Todas as questões foram corretamente resolvidas pelo grupo, em uma situação em que observamos sua construção e resolução, notando a participação efetiva dos sujeitos pesquisados, inclusive em suas redações!

Diante da análise considerada, constatamos, pois, um aumento de compreensão dos conceitos de combinatória e seu uso na resolução de problemas de combinatória.

As evidências notadas durante a intervenção apontam nosso olhar para os seguintes fatos:
A interação entre os grupos GA e GM durante o Encontro com o Acontecimento é indicativa de que a idéia de colocar os licenciandos como autores do processo de ensino é uma estratégia de formação a ser considerada nos cursos de licenciatura;

Na hipótese de termos que escolher um momento de destaque para a intervenção, consideraríamos aquele em que o sujeito Y, no papel de professor, colocou a metáfora "temos que desorganizar", durante o Encontro com o Acontecimento. Sentimos naquela ocasião um redescobrir de significado perdido no ensino fundamental para a noção de contagem: aquele associado à divisão. Estratégias de ensino para retomar esta busca naquele nível de ensino, devem ser motivos de outras pesquisas pelos educadores;
Em suma, o uso do CEK para conduzir as ações da pesquisa durante a intervenção permitiu-nos implementar uma dinâmica condizente com as condições de reflexividade crítica e de (re)construção permanente supostas na Teoria dos Construtos Pessoais: nossa conferência participativa e a discussão sobre situações didáticas (Anexo 3) trouxeram considerações diversas sobre os atos de ensinar e de aprender, a relação entre esses atos, seus pressupostos epistemológicos, importância de se pensar a aprendizagem de um conhecimento específico incluído numa proposta científica para uma didática sobre ele e a necessidade de uma tomada de posição filosófica sobre essas considerações. Ainda mais, o formato imposto ao longo das etapas do CEK, requisitando tarefas de interação entre os alunos tais como: a formação dos grupos GM e GA, e a revisão construtiva em que um grupo elaborou e corrigiu uma avaliação para o outro grupo permite-nos falar que o processo de organização da aprendizagem observada foi intrinsecamente colaborativo por parte dos alunos.

Referências Bibliográficas

BASTOS, H.F.B.N. **Changins teacher´s practice:** towards a constructivist methodology of physics teaching. Tese de doutorado. Inglaterra: University of Surrey 1992.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros curriculares nacionais,** 3. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: 1999.

D'AMBRÓSIO, B.S. **Formação de professores de matemática para o século XXI:** o grande desafio**.** In Pro-Prosições. v.4, nº 1 (10). São Paulo: Cortez, 1993. p.35-41.

DORNELAS, A.C.B. **O princípio multiplicativo como recurso didático para a resolução de problemas de contagem.** 2004. 128f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. In **Educação Matemática** – Uma introdução. Série Trilhas, São Paulo: EDUC, 1999.

KELLY, George A. **A theory of personality**: The Psychology of Personal Constructs. New York. The Norton Library, 1963.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E. & MORGADO, A.C. **A matemática para o ensino Médio**, vol 2. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LOUREIRO, C. Multiplicação, Combinatória e Desafios. **Educação e Matemática**, ano 10, n.44 p 14-20, 1997.

MINGUET, P.A. **A construção do conhecimento na educação**; trad. J.A. Llorens. Porto Alegre: Artmed,1998.

MOREIRA, M. A. **Teorias da aprendizagem**. São Paulo. EPU, 1999.

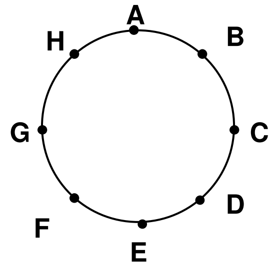
ROCHA, J.A. **Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciandos em matemática.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências pela UFRPE, 2006.

Anexo I: Problemas propostos no Pré- teste

1. Dados 8 pontos distintos sobre uma circunferência indique:

a) Quantas retas podem ser traçadas ligando 2 destes pontos?

b) E se os pontos escolhidos não forem consecutivos?



2. Quantos números naturais com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?

3. Quantos subconjuntos com três elementos tem o conjunto {1,2,3,4,5,6,7}?

4. Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?

5. Quantos triângulos podemos formar com 8 pontos distintos do plano sabendo que precisamente três destes pontos estão alinhados ?

Anexo II: Problemas propostos na etapa do Investimento.

k) Num universo de 500 pessoas, 300 assinam o jornal A e 250 assinam o jornal B. Qual o número de pessoas que assinam ambos os jornais, se 50 pessoas entre elas não assinam os jornais?

l) Quantos números de 5 algarismos podemos formar com os algarismos 1,2,3,4 e 5? (Números Naturais)

m) Tenho 6 livros A, B, C, D, E e F, e quero empacotá-los dois a dois. Quantos são os pacotes possíveis?

n) Tenho 6 frutas distintas e quero fazer sucos com duas frutas diferentes. Quantos sucos distintos são possíveis?

o) Tenho duas empresas de ônibus ligando Recife a Caruaru. A empresa A tem 5 ônibus e a empresa B tem 4 ônibus. Usando ônibus distintos quantas são as formas de ir a Caruaru?

p) Quantos anagramas podemos formar com a palavra OLINDA?

q) Quantos números naturais de 5 algarismos distintos posso formar, usando apenas os algarismos ímpares?

r) Com os algarismos de 1 a 9, quantos números naturais de três algarismos distintos podemos formar?

s) Marcando-se 8 pontos distintos em um círculo, quantos triângulos posso formar com os vértices nesses pontos?

t) De 25 alunos de uma classe quero formar comissões com 3 alunos onde 1 é presidente, 1 secretário e o outro tesoureiro. Quantas comissões posso fazer?

Anexo III: Testes propostos pelos grupos na revisão construtiva

TESTE T_1 (Elaborado como a participação ativa de GM)

T_{11}. Uma sementeira contém doze mudas de rosas e oito mudas de cravos. Um cliente deseja comprar três mudas de rosa e quatro mudas de cravo. De quantos modos ele pode efetivar tal compra?

T_{12}. Um time de futebol de salão tem onze jogadores dos quais somente André é goleiro. De quantos modos o técnico pode escalá-lo para jogar se os demais jogadores podem jogar em qualquer das posições restantes?

T_{13}. Há cinco estradas ligando a cidade A à cidade B, seis ligando B a C e seis ligando C a D. Quantas são as maneiras de ir de A para D passando por B e C e usando tais estradas?

T_{14}. Quantos números naturais de cinco algarismos distintos são menores que 43892?

TESTE T_2 (Elaborado com a participação ativa de GA)

T_{21}.Quantos números naturais com cinco algarismos distintos iniciados por sete ou por nove têm os demais algarismos todos pares?

T_{22}. Quantos números naturais com seis algarismos distintos podem ser construídos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, de modo que eles alternem algarismos pares e ímpares em sua escrita?

T_{23}. De um grupo de oito alunos, deseja-se formar uma diretoria para o grêmio com quatro alunos de modo a se ter um presidente, um vice-presidente, um secretario e um tesoureiro. De quantos modos pode-se escolher tal diretoria?

T_{24}. Uma sementeira contém doze mudas de rosas e oito mudas de cravos. Um cliente deseja comprar três mudas de rosa e quatro mudas de cravo. De quantos modos ele pode efetivar tal compra?

Anexo IV: Descrição do Encontro com o acontecimento

Nele, os números entre parêntesis após uma sentença indicam, em minutos e segundos a partir do início da aula, os instantes em que captamos dados significativos para nossa análise.

TEMPO	*GM: GRUPO MESTRE*	*GA: GRUPO ALUNO*
0-10	F é o professor. Motiva. Lê definição posta no quadro (Definição como agrupamento). Ratifica B. Acrescenta: A ordem é importante; É seqüência Dá fórmula para A_n^p Resolve Ex. 1: Com 8 lápis de cores de quantos modos podemos pintar uma bandeira de 4 listras? (3:10) D corrige enunciado: "listras distintas". F conclui o problema usando o princípio multiplicativo. F define permutação. Escreve $A_n^n = P_n$	B chama atenção: agrupamento ordenado. (2:29) Alunos observam G informa: Tá havendo repetição (3:15) Alunos parecem compreender.
10-15	F põe Ex. 2 no quadro. Questiona GA Escreve solução (12:00) da parte a. Questiona: "e a parte b" (12:40) Aguarda. Escreve solução no quadro. Conclui. Chama Y para continuar.	E e G participam: "as vogais funcionam como uma só letra" (11:30) Alunos escrevem! (13:15) Palmas!
15-25	Y faz o contraponto: "aprender a desorganizar".(16:10) Chama B, C e E ao quadro. Realiza dinâmica. Retorna ao tema desorganização (6 vezes). Compara Arranjo (ordena) com Combinação (desordena). Define Combinação (21:00). Põe problema: "quantas peças de dominó"(22:00) Indica: "naipes distintos" desenha pedra; faz solução (p.m.)	Parecem interessados na Dinâmica. Brincam. Parecem Compreender B responde: 7 x 7 (22:30) Alunos participam
25-35	Questiona: "pode ser ensinado na 4º série" (25:00) Fala sobre exemplos significativos do dia-a-dia. Mostra: "7º série tem que calcular o nº de diagonais do polígono. O que é isso?" (26:00) "E se fosse um prisma?" Menciona o que ocorre no Ensino Médio (Combinatória depois Geometria Espacial) Volta: Ordem x Desordem. Fala permutação com repetição. Exemplifica: Anagramas de ANA. "É sempre bom começar com um problema simples" Escreve todas as possibilidades. Propõe "Arara" (33:00) Encerra.	B responde: "Poder pode mas eu não tentaria" (25:05) Alunos parecem envolvidos com a colocação. B indica a solução (33:10) Palmas!
35-42	A retoma: quais as chances de Santa Cruz e Náutico se classificarem para o Grupo A (Momento próprio para o questionamento). Diz: "Trazer problemas do interesse dos alunos" (37:00) (Traz saco com 4 bolas representando os 4 times ainda na disputa). D ajuda (39:00). A apresenta resultado. Mostra necessidade da fórmula para números grandes: "E se fosse no início do campeonato". Encerra.	Brincam. Participam. Aparentam gostar. Interagem (40:00) Palmas!

APÊNDICE 1

Apêndice 1: Pré-Teste e Pós-Teste Aplicados no Projeto Piloto

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
DISCIPLINA: FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA
ALUNO: ____ DATA: __________

PRÉ – TESTE

01) Defina ou exemplifique as seguintes noções:

1.1) Princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo.

____

____

1.2) Princípio da exclusão ou inclusão ou princípio aditivo

____

____

1.3) Arranjos

____

____

1.4) Combinações

____

____

1.5) Permutações

____

____

1.6) Função Injetora

____

____

1.7) Função Bijetora

____

____

02) Diga como você tomou contato com as noções acima. (Caso tenha mais de uma alternativa assinale-as).

	ITENS
NO ENSINO MÉDIO	
NOS CURSINHOS PRÉ-VESTIBULARES	
ATRAVÉS DE LIVROS	
NO ENSINO SUPERIOR	
OUTROS	

(Descreva):

____

____

____

03) Você ensina Matemática ou já ensinou esta disciplina?

- ☐ Sim, a alunos particulares;
- ☐ Sim, em escolas particulares;
- ☐ Sim, em escolas da Rede Oficial
- ☐ Não

04) Se você ensina ou já ensinou Matemática, informe quais dos itens acima você já ensinou, descrevendo a situação em que isto ocorreu.

____

____

____

05) Resolva os seguintes problemas:

5.1) Um mágico se apresenta em público vestindo calças e paletó de cores diferentes. Determine o n° mínimo de peças (n° de calças mais n° de paletós) de que ele precisa, para que possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes.

5.2) Cinco rapazes e cinco moças devem posar para fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar esse grupo?

5.3) Um carro de montanha russa é formado de 10 bancos de dois lugares cada um. De quantos modos dez casais podem sentar-se nesse carro?

5.4) Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2,3,4,6,9.

5.5) Dispõe-se de n objetos A e m objetos B para se colocar em duas caixas, de modo que em cada caixa haja, no mínimo, p objetos A e q objetos B ($2p \leq n$ e $2q \leq m$). Determine o número de possibilidades de se fazer a colocação.

OBSERVAÇÃO: O pós-teste constou das questões 5.1 a 5.5, acrescentado da questão 5.6.

5.6) Quantos anagramas da palavra Olinda têm vogais e consoantes se alternando?

Solicitou-se ao aluno que comentasse sobre a importância ou relevância do conteúdo trabalhado para o ensino, indicando em que série ou nível de ensino ele deve ser trabalhado.

APÊNDICE 2

Apêndice 2: Plano de Curso da Disciplina Fundamentos de Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
DISCIPLINA: FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA
SEMESTRE LETIVO: 2005.2

1. JUSTIFICATIVA

A disciplina Fundamentos de Matemática está elencada no 4º período do Curso de Licenciatura de Matemática da UFRPE, tendo como pré-requisito a disciplina Elementos de Lógico e Teoria dos Conjuntos.

O curso de Licenciatura em Matemática desta Universidade é oriundo do antigo Curso de Licenciatura Plena em Ciências, com habilitação em Matemática, homologado pela resolução 39/75 CEPE/UFRPE, tendo – ao longo do tempo – sofrido transformações que por um lado reproduzem diretivas do estatuto científico-educacional da época e por outro indicam as lutas e articulações internas do conjunto acadêmico diretamente envolvido com ele.

O surgimento desta disciplina deu-se quando do desmembramento do Curso de Licenciatura em Ciências para as Licenciaturas específicas (resolução 131/88 CEPE/UFRPE) tendo como objetivo a introdução de questionamentos sobre os Fundamentos da Matemática. Tal objetivo contemplava a inquietude de um grupo de professores do corpo docente quanto a inexistência de tais questionamentos nas disciplinas tradicionalmente consideradas na formação do professor de Matemática.

Contudo, quando da implementação do novo currículo, o conteúdo programático da disciplina ficou estabelecido de modo muito geral, permitindo adaptações ora fluindo para uma revisão de conteúdos de Ensino Médio, ora para o trato de problemas de fato concernentes aos fundamentos filosóficos de Matemática.

Para o presente semestre letivo pretendemos retomar esta última preocupação que originou a criação da disciplina. Nesse sentido, o questionamento sobre a noção do número, suas origens e desenvolvimento histórico servirá de base para a construção de seu conteúdo programático. Sendo a disciplina componente de curso de formação de professores, intencionamos interpor nessa construção, atividades em que a prática docente é utilizada como modo de contrapor ao lado formal da construção matemática subjacente ao curso, a contextualização necessária à formação dos futuros professores alunos da disciplina.

2. OBJETIVOS

- Descrever a axiomática de Peano para números naturais;
- Construir o Sistema dos números inteiros a partir dos números naturais;
- Inferir conceitos e propriedades dos sistemas $(N,+,\cdot,\leq)$ e $(Z,+,\cdot,\leq)$ usados nos ensinos Fundamental e Médio;
- Incrementar e discutir práticas educativas concernentes a tais conceitos e propriedades.

3. EMENTA

CONTEÚDO	DESCRIÇÃO
Pré-requisitos	Revisão sobre a linguagem dos Conjuntos e do cálculo sentencial elementar. Relações Binárias: Equivalência e Ordem. Funções, conceito e tipologia (injeções e sobrejeções). Funções inversas.
Os Naturais	Descrição de N a partir dos Axiomas de Peano: operações e propriedades. Princípio da Indução Finita. Problemas de Contagem;
Aritmética em N	Teorema Fundamental da Aritmética. Algoritmo Euclideano. Primos, divisibilidade, mdc e mmc. Propriedades
Os Inteiros	Construção formal do Anel dos Inteiros a partir do sistema $(N,+,\cdot)$
Aritmética em Z	Adaptação dos conceitos vistos em N para os Inteiros

4. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO E DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

DATA	CONTEÚDO TRABALHADO	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
04/08	Estabelecimento do Contrato Didático	Discussão
09/08	A linguagem dos conjuntos	Exposição oral
11/08	Aplicações, definição, exemplos e propriedades	Exposição oral
16/08	Composição de Funções; Propriedades.	Exposição oral
18/08	Relações: equivalência e ordem	Exposição oral
23/08	Os naturais: Axiomática de Peano	Exposição oral
25/08	O princípio da indução: Fórmulas de recorrência	Exposição oral
30/08	A adição em N; Propriedades	Exposição oral
01/09	A Multiplicação em N; Propriedades	Exposição oral
06/09	Antecipação 1	Estudo individual
08/09	Exercícios sobre indução matemática	Exposição oral
13/09	A ordem em N	Exposição oral
15/09	Antecipação 2	Exposição oral
20/09	Investimento 1	Exposição oral
22/09	Investimento 2	Discussão
27/09	Teorema Fundamental da Aritmética	Exposição oral
29/09	Divisores e Múltiplos	Exposição oral
04/10	Investimento 3	Estudo individual
06/10	Máximo Divisor Comum; Propriedades	Exposição oral
11/10	Exercícios sobre MDC	Exposição oral
13/10	Mínimo Múltiplo Comum; Propriedades;	Exposição oral
18/10	Exercícios sobre MMC	Exposição oral
20/10	Construção dos Inteiros (Primeira Parte)	Exposição oral
25/10	Encontro com acontecimento	Experimentação
27/10	Construção dos Inteiros (Segunda Parte)	Exposição oral
01/11	A ordem em Z	Exposição oral
03/11	Confirmação ou refutação	Estudo individual
08/11	Revisão construtiva	Estudo em grupo
10/11	Mudanças conceituais na passagem de N para Z	Debate
15/11	Avaliação participativa	Exercícios em grupo
17/11	Construção do plano de ensino sobre combinatória	Exercícios em grupo

5. AVALIAÇÃO

A avaliação será organizada de forma coerente com os pressupostos de ensino como produção de conhecimento ao longo de todo desenvolvimento da disciplina. Serão produtos para análise avaliativa:

- Sínteses escritas pelos alunos sobre os conteúdos trabalhados ao longo do curso;
- Elaboração de textos sobre práticas de ensino ou organização da própria prática;
- Resolução individual ou em grupo para problemas propostos sobre o conteúdo abordado.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, L. R. **Matemática, contexto & aplicações**. São Paulo: Ed. Ática, 2000.

DAVIS, P.J. & HERSH, R. **A experiência matemática.**(Tradução de João Bosco Pitombeira) Rio de Janeiro: F.Alves, 1985

DICKSON, L.E. **History of the Theory of Numbers.** (3volumes) Carnegia Institution, 1923

DIEUDONNÉ, J. **A formação da matemática contemporânea**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues – Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004

FERNANDES, A.M.V. [et.al] **Fundamentos de Álgebra.** Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E. & MORGADO, A.C. A **Matemática para o Ensino Médio**, vol 2. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

WILDER, R.L. **Introduction to the foundations os mathematics**. Nova York: John Wiley & Sons, 1965.

APÊNDICE 3

Apêndice 3: Plano de Observação da Prática Pedagógica durante o Projeto Piloto

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRANDO: JOSÉ DE ARIMATÉA ROCHA
ORIENTADORA: PROFª HELOÍSA FLORA BRASIL NÓBREGA BASTOS, DRA.
CO-ORIENTADORA: PROFª CLAÚDIA HELENA DEZOTTI, DRA.

PLANO DE OBSERVAÇÃO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DURANTE O PROJETO PILOTO

1. Dados de Identificação

Instituição: UFRPE
Curso: Licenciatura em Matemática
Público: Alunos da Disciplina Fundamentos da Matemática durante o semestre letivo 2005.1

2. Objeto da observação:

O fazer pedagógico do professor da disciplina no desenvolvimento da análise combinatória e a reação dos alunos à prática adotada.

3. Questão norteadora:

Como se processa a aprendizagem do conteúdo da analise combinatória simples em uma prática de ensino usual?

4. Objetivos:

GERAL: Analisar o desenvolvimento do ensino da teoria combinatória em uma prática usual dessa disciplina.
ESPECÍFICO: Identificar durante a prática adotada a reação dos aprendizes à mesma, bem como a aprendizagem decorrente dessa prática.

5. Critérios para observação
   - 5.1) Organização das situações didáticas
   - 5.2) Participação do grupo-classe

6. Instrumentos de coleta de dados
    6.1) Observação
    6.2) Diário de Campo

7. Calendário da observação
    7.1) Prática Docente: março a abril de 2005 (duração: 16 horas-aulas)

APÊNDICE 4

Apêndice 4: Pré-Teste e Pós-Teste da Intervenção

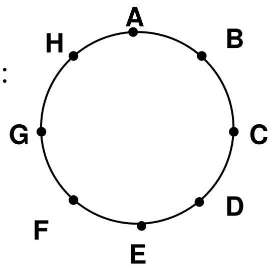
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
RECIFE, _______de setembro de 2005
Professor: Arimatéa
Aluno(a): _______________________________________
Início:____________ Fim: ______________

Pré – Teste / Pós - Teste

Problema 1: Dados 8 pontos distintos sobre uma circunferência, indique:

a) Quantas retas podem ser traçadas ligando 2 destes pontos?

b) E se os pontos escolhidos não forem consecutivos?



Problema 2: Quantos números naturais com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?

Problema 3: Quantos subconjuntos com três elementos tem o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ?

Problema 4: Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?

Problema 5: Quantos triângulos podemos formar com 8 pontos distintos do plano sabendo que precisamente três destes pontos estão alinhados ?