UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

CONTRATO DIDÁTICO: NEGOCIAÇÕES, RUPTURAS E RENEGOCIAÇÕES A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

CARLA MARIA PINTO DE SOUZA

Recife

2011

CARLA MARIA PINTO DE SOUZA

CONTRATO DIDÁTICO: NEGOCIAÇÕES, RUPTURAS E RENEGOCIAÇÕES A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Lima.

Recife

2011

Ficha catalográfica

S729c Souza, Carla Maria Pinto de

Contrato didático: negociações, rupturas e renegociações a partir de uma sequência didática sobre progressão aritmética / Carla Maria Pinto de Souza. -- 2011.

164 f.: il.

Orientadora: Anna Paula de Avelar Brito Lima.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife, 2011.

Inclui referências e apêndice.

1. Contrato didático 2. Sequência didática 3. Progressão aritmética I. Lima, Anna Paula de Avelar Brito, orientadora II. Título

CDD 370

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

CONTRATO DIDÁTICO: NEGOCIAÇÕES, RUPTURAS E RENEGOCIAÇÕES A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Comissão examinadora

____

Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Lima

Presidente - UFRPE

____

Profº. Drº. Abraão Juvêncio de Araújo

1º Examinador - UFPE

____

Profª. Drª. Mônica Maria Lins Santiago

2º Examinador - UFRPE

____

Profº. Drº. Ross Alves do Nascimento

3º Examinador - UFRPE

Dissertação aprovada em 17 de fevereiro de 2011.

Dedico este trabalho a Deus, à minha família e a todos que estiveram ao meu lado me incentivando nesse projeto.

AGRADECIMENTOS

A realização dessa pesquisa tornou-se possível com o apoio e incentivo de várias pessoas.

A elas não poderia deixar de prestar meus agradecimentos:

Primeiramente a Deus, por me dar o privilégio de estar viva e realizar este sonho.

Ao meu marido e minhas filhas, pela compreensão nas horas de ausência e cansaço. Vocês são minha alegria, minha vida.

À professora Anna Paula de Avelar, que acreditou em mim mesmo sem me conhecer e me forneceu, com muita paciência, a orientação necessária.

À professora e aos alunos, sujeitos da minha pesquisa, que tanto contribuíram e deram forma na prática, ao que eu apenas teorizei.

À amiga Angela, colega da especialização e ao Professor Vladimir, orientador na especialização, que acreditaram em mim e tanto me incentivaram ao ingresso no mestrado.

E a todos que contribuíram para que eu alcançasse o meu objetivo.

RESUMO

Esse estudo teve por objetivo investigar como uma professora negocia o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada para o ensino de Progressão Aritmética (P.A.).

A sequência didática foi idealizada contemplando a tipologia das situações didáticas proposta por Brousseau (ação, formulação, validação e institucionalização). Com isso, as atividades dessa sequência didática visaram possibilitar que sua aplicação fosse realizada de acordo com um contrato didático do tipo aproximativo, que é aquele em que se valoriza uma postura ativa do aluno na construção do conhecimento.

Os resultados observados evidenciaram que embora tivéssemos proposto uma sequência para ser aplicada conforme um contrato didático do tipo aproximativo, negociações, rupturas e renegociações de regras de contrato didático foram feitas ao longo do desenvolvimento da sequência. Acreditamos que essas rupturas das regras estabelecidas foram motivadas por marcas de contrato didático anteriores, ou seja, pelas regras implícitas e explícitas, que professora e alunos estavam habituados.

Palavras-chave: Contrato Didático, Progressão Aritmética, Sequência Didática.

ABSTRACT

This study aimed to investigate how a teacher negotiates the contract with teaching students in the 2nd year of high school, in the implementation of a didactic sequence previously established for the teaching of Arithmetic Progression (AP).

The didactic sequence was designed considering the type of didactic situations proposed by Brousseau (action, formulation, validation and institutionalization). Thus, the activities aimed at teaching sequence that enable your application to be performed according to a didactic contract type approximation, which is one in which value is an active student in constructing knowledge.

The observed results showed that although we proposed a sequence to be applied as a kind of didactic contract approximate; negotiations, renegotiations and breaks the rules of the didactic contract were made during the development of the sequence. We believe that these breaches of the rules were motivated by previous marks of didactic contract, or implicit and explicit rules by which teacher and students were accustomed.

Keywords: Didactic Contract, Arithmetical Progression, Didactical Sequence

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática é um campo fecundo de pesquisa educacional. Os estudos nesse campo se preocupam, dentre outras questões, com a compreensão, análise e descrição de fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática. A consolidação como área de pesquisa é de certa forma recente, se comparada à história milenar dessa disciplina.

Pais (2001), afirma que nas últimas décadas o desenvolvimento dessa área de pesquisa recebeu um grande impulso originando diversas tendências teóricas, como por exemplo, a Etnomatemática, a Psicologia da Educação Matemática, a Modelagem Matemática, a História da Matemática, a Didática da Matemática, entre outras.

Dentre essas tendências teóricas, a Didática da Matemática, influenciada por autores franceses e francófonos[1], é a que destacamos e que inspira a linha teórica de nosso trabalho. Segundo Pais (2001), diferenciar Educação Matemática e Didática da Matemática torna-se necessário, visto que esta última, na França, assume o significado de área de pesquisa educacional, enquanto que no contexto brasileiro é uma das tendências teóricas da Educação Matemática.

Ainda em relação à Didática da Matemática, mais do que área de pesquisa educacional, Chevallard (1991) propõe ser ela uma Ciência, e seu objeto de estudo é o sistema didático, composto pela tríade professor-aluno-saber, e de um modo mais amplo, o sistema de ensino.

De acordo com essa visão, no âmbito da Didática da Matemática foram desenvolvidas pesquisas sobre os tipos de situações de ensino e fenômenos didáticos que emergem na sala de aula a partir das interações entre os elementos do sistema didático.

[1] Países francófonos são aqueles que falam a língua francesa, como é o caso, por exemplo, da Suíça e do Canadá.

Se nos remetermos novamente à discussão de Chevallard sobre a tríade professor-aluno-saber, Brito Menezes (2006), apoiando-se na discussão de Margolinas (1993, apud BRITO MENEZES, 2006) afirma que inicialmente a relação entre os pólos humanos (professor e aluno) com o saber, revela-se bastante assimétrica e que nesse sentido espera-se que a relação didática proporcione uma evolução do aluno frente ao saber. Para Brousseau (1996b) essa evolução é possível desde que o professor proponha situações adequadas.

Com essa visão, Guy Brousseau (1996b) realizou estudos sobre as condições em que os saberes são constituídos, pois de acordo com ele o controle dessas condições pode permitir avanços no processo de aquisição desses saberes e elaborou uma teoria em que as situações didáticas são modelizadas: a Teoria das Situações Didáticas.

Para estruturar a Teoria das Situações Didáticas, uma das noções usadas por Brousseau (1996a) é a da aprendizagem por adaptação, na qual ele enfatiza a proximidade com os esquemas de assimilação e acomodação descritos por Piaget, e o aluno é impulsionado a adaptar seus conhecimentos às exigências da solução de um problema.

Ainda em relação à Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1996a) classifica as situações em situação de ação, onde há interação entre o aluno e o meio; formulação, onde ele estabelece hipóteses; validação, onde põe à prova as estratégias usadas; e situação de institucionalização, na qual sob o controle do professor são instituídas as convenções sociais do conhecimento.

Brousseau também realizou investigações sobre as regras implícitas e explícitas que regulam as situações didáticas. Ele denominou o conjunto dessas regras que permeiam as relações existentes entre professor, aluno e saber, de contrato didático. Para Brousseau o contrato didático é “a regra do jogo e a estratégia da situação didática.” (2006a, p. 50).

De uma forma mais tradicional de pensar o ensino de matemática, podemos refletir que dentre as diversas regras que permeiam a relação didática em aulas de Matemática, uma das regras negociada é a de que para aprender, o aluno precisa repetir os passos apresentados pelo professor. Como exemplo disso, a experiência que a pesquisadora teve enquanto aluna de Ensino Médio ao estudar Progressão Aritmética foi a seguinte: o professor apresentou a definição, a fórmula do termo geral e exercícios como modelos a serem reproduzidos.

Refletindo sobre essa abordagem de Progressão Aritmética, percebemos que ao aluno, bastaria fazer uso da fórmula, encontrar os números, substituí-los e então concluir o trabalho. Com isso a relação desse aluno com o saber pode ficar comprometida, visto que não desempenha um papel ativo e reflexivo durante o desenvolvimento da aula.

Diante do que discorremos, atualmente, vários pesquisadores têm feito investigações sobre sequências didáticas, algumas, inclusive, que se fundamentam na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Podemos citar como exemplo Dornelas (2007), Lins Lessa (2005) e Carvalho (2008).

Em alguns estudos os próprios pesquisadores aplicam a sequência que eles mesmos elaboram e determinam, assim, as regras de funcionamento para o momento da sala de aula a fim de proporem situações favoráveis à aprendizagem. Dornelas (2007), Archilia (2008) e Ferreira (2009) se inserem nesse grupo de pesquisadores. Já outros pesquisadores, como por exemplo, Lins Lessa (2005), elaboram a sequência didática e não agem como professor/pesquisador, posto que um professor colaborador é quem aplica a referida sequência.

Em relação aos dois grupos de pesquisas apresentados, refletimos que existem diferenças na negociação do contrato didático quando a sequência é aplicada por aquele que a elabora ou quando é aplicada por um professor que não a idealizou. Diante disso, resolvemos propor um estudo em que uma professora aplicasse a sequência didática elaborada pela pesquisadora, motivados pelos seguintes questionamentos:

- Como ocorrem as negociações quando uma professora aplica em uma sala de aula do 2º ano do Ensino Médio uma sequência didática proposta por uma pesquisadora, sobre Progressão Aritmética?

- Como se dá a gestão do tempo didático, considerando o tempo previsto na sequência e o tempo efetivo de aplicação da mesma pela professora.

Sendo assim, o objetivo geral do estudo é:

- Investigar como a professora negocia o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada, para o ensino de Progressão Aritmética[2].

  Como objetivos específicos, propomo-nos a:

- Identificar as negociações, rupturas e renegociações que surgem na aplicação da sequência didática, considerando as regras estabelecidas pela professora na aplicação da sequência didática sobre P.A.
- Analisar como se dá a gestão do tempo didático, considerando o tempo previsto na sequência e o tempo efetivo de aplicação da mesma pela professora.

A estrutura desse documento segue a seguinte ordem: no primeiro capítulo abordaremos os referenciais teóricos de nossa pesquisa, que estão embasados na Didática da Matemática, particularmente na Teoria das Situações Didáticas; no segundo capítulo enfatizaremos o conteúdo

[2] Quando nos referirmos à Progressão Aritmética, trataremos como P.A.

matemático, Progressão Aritmética, que representa o pólo do saber do nosso estudo; no terceiro capítulo teremos a abordagem metodológica da pesquisa, e para finalizar, no quarto capítulo, discutiremos os resultados de nosso estudo.

CAPÍTULO 1

A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Como destacamos na introdução o objetivo de nossa pesquisa é investigar como uma professora negocia o contrato didático, na aplicação de uma sequência didática, previamente proposta, para o ensino de Progressão Aritmética, com alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Elegemos, conforme mencionado, como referencial teórico para a realização desse estudo, a Didática da Matemática e a Teoria das Situações Didáticas. Essa escolha se deu pelo fato de que acreditamos que o referencial da Didática da Matemática é o que melhor discute as relações estabelecidas entre um professor, um aluno e um saber.

Já a Teoria das Situações Didáticas, particularmente, as fases da Situação Didática, propostas por Brousseau (1996b), foi escolhida porque acreditamos que nos auxilia na discussão e compreensão de como elaborar uma sequência didática de P.A. que venha a contribuir para a construção do conhecimento pelo aluno.

Também, buscamos referencial na teoria do Contrato Didático por entendermos que a partir do momento que a pesquisadora elaborou a sequência didática sobre P.A., ela estabeleceu previamente regras para sua aplicação, e sendo assim, as bases de um contrato didático foi pensado para gerir a relação didática.

Cabe destacar que também nos fundamentamos teoricamente nos estudos referentes à Engenharia Didática, porque utilizamos de algumas etapas dessa metodologia para estruturarmos a análise das atividades elaboradas na sequência didática de P.A.

Diante disso, contextualizaremos no âmbito da Didática da Matemática o surgimento da Teoria das Situações Didáticas, suas especificidades, e posteriormente, passaremos a expor aspectos referentes à Engenharia Didática e ao Contrato Didático.

1.1 A Didática da Matemática e Sistema Didático

A Didática da Matemática, de acordo com Brousseau (1996a), investiga atividades didáticas, cujo objetivo é o ensino da Matemática. Nesse campo, os resultados são referentes aos comportamentos cognitivos dos alunos, os tipos de situações usadas para ensiná-los e os fenômenos que se revelam com a comunicação do saber.

D'Amore (2007), por sua vez, reflete que a Didática da Matemática é "a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito" (p. 3).

Gálvez (1996) expõe que a Didática da Matemática como campo de pesquisa, surgiu num importante momento no cenário educativo da França dos anos 60. Nesse contexto, foram criados os Institutos de Pesquisa no Ensino de Matemática (IREM). Tais institutos tinham como função inicial, complementar a formação dos docentes e produzir material para auxiliá-los nas aulas, como por exemplo, textos matemáticos, sequências de lições, jogos didáticos, etc.

Geralmente, a produção desses materiais era acompanhada por uma experiência prática que tinha como objetivo provar a viabilidade desses materiais e realizar adequações, para que posteriormente, eles pudessem ser difundidos no sistema didático, sistema esse que, segundo Brousseau (1996a) era constituído pela tríade professor-aluno-saber. Chevallard (1991), por sua vez, propõe que o sistema didático faz parte de um sistema mais amplo, o sistema de ensino. Na sua concepção esse sistema 'aberto', pois recebe influências da "Noosfera", que é a esfera que pensa o currículo e age sobre o funcionamento escolar, bem como da própria sociedade.

Com a criação dos IREM, a Didática da Matemática criou um espaço propício à investigação e análise dos fenômenos didáticos que emergem nas relações didáticas, com a finalidade de entender a apropriação do saber que se construiu historicamente.

Sobre isso, Brousseau (1996b) afirma que o estudo das condições nas quais se constituem os saberes deve ser realizado, pois poderá contribuir para otimizar os processos de aquisição do conhecimento no ambiente escolar.

Com essa visão ele estruturou uma teoria sobre as condições em que o saber se realiza: a Teoria das Situações Didáticas. Vejamos, então, o que caracteriza e quais os aspectos fundamentais dessa teoria.

1.2 A Teoria das Situações Didáticas

Inserido no contexto da Didática da Matemática, Guy Brousseau desenvolveu e propôs a Teoria das Situações Didáticas, a partir do princípio de que cada conhecimento ou saber matemático pode ser determinado por uma situação, ou seja, por uma ação entre duas ou mais pessoas com vistas à apropriação de um saber.

Segundo Brousseau (1996a), a situação deve ser concebida como um modelo de conhecimento a ser ensinado. Entretanto, ao mesmo tempo, ela constitui-se tanto como uma condição para o estabelecimento de uma relação didática específica com o conhecimento (relação triangular professor – aluno – saber), quanto como um instrumento privilegiado no processo de ensino e aprendizagem.

Essas relações são representadas por meio de um triângulo que Brousseau denomina de Triângulo das Situações Didáticas, conforme a figura proposta por Joannert para ilustrar esse Sistema:

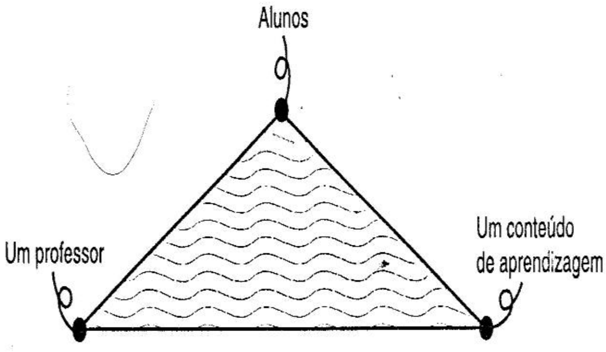


Figura 1 – Triângulo das Situações Didáticas

Fonte: Jonnaert, 2002, p. 56

A partir dessa figura, podemos observar que no triângulo didático são estabelecidas relações entre os vértices: professor e aluno, professor e saber, aluno e saber. E embora o triângulo apresente-se como eqüilátero essas relações são conflituais e assimétricas.

Sobre isso, Brito Menezes (2006) remete que nesse triângulo há uma tensão, natural e saudável que é determinada pela gestão dos fenômenos didáticos envolvidos. Além disso, quando um novo saber entra em cena na sala de aula, as tensões entre os pólos são mais evidentes, pois há uma maior assimetria do professor e do aluno frente ao saber.

Partindo da relação instituída de maneira triangular, na qual os vértices se comunicam e se interrelacionam, e da intencionalidade da ação/relação estabelecida entre os atores do processo de ensino e aprendizagem, passemos a discorrer sobre o papel de cada pólo do triângulo referido na Teoria das Situações Didáticas.

1.2.1 O papel do professor, do aluno e do saber na Teoria das Situações Didáticas

Brousseau (1996b) propõe como ideia fundamental aproximar o trabalho do aluno da maneira como é produzida a atividade científica, isto é, o aluno se transformar em um pesquisador, testando, formulando hipóteses, construindo modelos, socializando os resultados obtidos.

Já em relação ao professor, este deve elaborar situações de ensino que impulsionem o aluno a se aproximar do saber que deve se apropriar. Para isso acontecer, cabe ao professor a dupla função: procurar situações para que os alunos dêem sentido ao conhecimento, produzindo a recontextualização do saber e ajudá-los a descontextualizar, despersonalizar esse saber, assim como fazem os matemáticos, tornando a produção individual em fato universal.

Ainda para Brousseau (1996a), a maneira como o aluno aprende pode ser compreendida se nos remetermos a Piaget: adaptando-se a um meio, às dificuldades, numa interação complexa com esse meio. No entanto, Brousseau ressalta que se o meio estiver desprovido de intenções didáticas não haverá como os alunos adquirirem todos os conhecimentos culturais que se deseja para eles. Assim, o professor deve escolher coerentemente situações para que o aluno elabore seus conhecimentos como resposta particular a uma pergunta fazendo-os funcionar ou modificando-os de acordo com o exigido pelo meio.

Brousseau (1996b) ressalta que o papel do saber na situação didática é permitir que o aluno antecipe, sendo necessário que o professor proporcione que esse aluno atue sobre a situação sem conduzi-lo explicitamente.

Na sua reflexão, ele propõe, ainda que é relevante que se entenda que o contexto escolar não é por si só fundamental na definição de situação didática. O que de fato importa é o caráter intencional, ou seja, ter sido criada para que alguém aprenda. Fundamentado nessa preocupação, Brousseau (1996a e 1996b) propôs o que se pode chamar de uma “tipologia das situações”, na qual ele classificou as situações em didáticas, adidáticas e não-didáticas. Falemos brevemente sobre essa tipologia.

1.2.2 Tipologia das Situações

Segundo Brousseau (1996a), a situação didática pode ser definida como um conjunto de relações que se estabelecem explicitamente e ou implicitamente entre alunos, um determinado contexto e o sistema educativo representado pelo professor, com o propósito de oportunizar, para estes alunos, a apropriação de um saber.

As situações a-didáticas, por sua vez, são aquelas em que o professor consegue fazer desaparecer sua vontade, ou seja, o aluno terá autonomia e essa situação funcionará sem intervenção do professor, mediatizadas pelo próprio saber e pela relação do aluno com ele.

As situações não-didáticas, por sua vez, são aquelas situações onde não há uma intencionalidade didática. São situações do cotidiano fora ou não do contexto escolar, onde o aluno poderá relacionar o que aprendeu na escola e fazer funcionar o conhecimento.

Brousseau (1996b) ainda propôs que as situações didáticas, podem ser categorizadas em função da relação que se estabelece com o saber. São elas: situação de ação, formulação, validação e institucionalização. Em linhas gerais iremos caracterizar cada uma delas.

A **situação de ação** é aquela em que é gerada uma interação entre o aluno e o meio físico. Ele deve tomar iniciativas para que sua atividade fique organizada.

A **situação de formulação** tem como objetivo a comunicação de informações entre os alunos, de modo que para isso acontecer terão de transformar a linguagem habitual ao que precisam comunicar.

A **situação de validação** é aquela na qual se tenta 'convencer' aos outros sobre a validade do que foi feito. Ou seja, os alunos elaboram provas que devem ser demonstradas, pois não basta a comunicação empírica de que o que afirmam está correto, mas é necessário explicar o porquê de ser assim.

A **situação de institucionalização** constitui o momento de estabelecimento das convenções formais. Nesse tipo de situação, procura-se que o coletivo dos alunos participantes de uma determinada aula, adote o significado social estabelecido do saber que foi vivenciado por eles, nas situações de ação, formulação e validação. Ou seja, conforme Pais (2001), é o momento em que sob controle do professor, procede-se a passagem do conhecimento particular construído pelos alunos, ao nível de conhecimento científico, estabelecido historicamente e culturalmente.

Vale salientar que em relação à classificação das situações didáticas, destacamos que elas geralmente encontram-se relacionadas entre si e que essa proposta de separação serve para possibilitar uma melhor análise didática e não para estabelecer limites entre elas.

Também é importante destacar que cada uma dessas situações articula regras de contrato diferenciadas, visto que as tarefas do professor e alunos, em relação ao saber, são distintas em cada uma delas.

Salientamos mais uma vez, que na definição de situação didática o que é bastante relevante é o fato da intencionalidade, ou seja, o propósito explícito de que houve uma construção para alguém aprender algo. Em relação a isso, Brousseau (1996b), como já foi dito anteriormente, destaca que estudando as condições nas quais são constituídos os conhecimentos permite-se que se estabeleça o controle dessas condições, e assim, o processo de aquisição escolar do conhecimento pode ser otimizado. Sendo assim, a pesquisa dos fenômenos didáticos não se reduz à observação e análise dos processos que ocorrem na sala de aula, mas vai além, pois se torna necessário certo controle sobre essas condições.

Ainda em relação à Teoria das Situações Didáticas, utilizamos em nosso estudo, ao elaborarmos uma sequência didática para o ensino de P.A., atividades que buscam promover situações de ação, formulação, validação e institucionalização.

Essas fases propostas por Brousseau podem ser mais bem evidenciadas quando na proposição de uma Engenharia Didática. Nesse tipo de Engenharia, as variáveis precisam ser bem determinadas, conhecidas e controladas, pois é a própria atividade que vai ser balisadora da aprendizagem do aluno, e o professor aparece como alguém que fica ‘de fora’, analisando em que medida as atividades e sequências propostas cumprem o seu papel.

Nesse sentido, não poderíamos falar em uma Engenharia Didática em nosso estudo, porque claramente o professor assume um papel mais direto, como mediador entre o aluno e a sequência. Entretanto, nos valemos de algumas das etapas da Engenharia, para podermos analisar a sequência proposta e antecipar as possíveis estratégias a serem desenvolvidas pelo aluno em cada etapa da nossa sequência.

Trataremos brevemente, a seguir, das principais noções da Engenharia Didática.

1.3 Engenharia Didática

A noção de Engenharia Didática surgiu no início dos anos 80, na Didática da Matemática. Para uma melhor compreensão do termo Engenharia Didática, Artigue (1992) faz analogia ao trabalho do engenheiro que com o intuito de realizar um trabalho preciso, concebe, planeja e executa um projeto.

Segundo Machado (2002), a Engenharia Didática é uma metodologia que é constituída com a finalidade de analisar as situações didáticas, as quais são objetos de estudo da Didática da Matemática, e se ancora tanto na dimensão teórica quanto prática.

A Engenharia Didática também pode ser considerada uma sequência de aulas elaboradas por um “professor-engenheiro” com o objetivo de realizar um projeto de aprendizagem para um grupo de alunos específico.

Assim, a noção de Engenharia Didática possui dupla função, pois pode ser entendida como metodologia de pesquisa, resultado de análise a priori, ou como uma produção a ser utilizada para o ensino.

De acordo com Pais (2001), a realização de um projeto didático engloba os desafios e dinamismo próprios da execução em sala de aula e por isso, além do referencial teórico para subsidiar o planejamento, é necessário que um controle sistemático da prática aconteça e seja preservada, na atividade científica, a confiabilidade da pesquisa.

Para isso ocorrer, a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa é composta por quatro fases: análise preliminar, concepção e análise a priori das situações didáticas, experimentação, análise a posteriori e validação.

Vamos caracterizar então, cada uma dessas fases.

1.3.1 Fases da metodologia da Engenharia Didática

Segundo Pais (2001), as fases da Engenharia Didática podem ser resumidamente compreendidas da seguinte maneira:

1ª Fase: Análise Preliminar

É a etapa em que são realizadas considerações sobre os fundamentos teóricos da pesquisa, a fim de embasar a concepção da Engenharia Didática. De acordo com os objetivos e necessidades emergentes, essa análise pode ser retomada e aprofundada durante o desenvolvimento da pesquisa.

2ª Fase: Concepção e análise a priori

É a fase em que se define certa quantidade de variáveis do comando do sistema de ensino que podem interferir na composição do fenômeno e podem ser manipuladas pelo professor a fim de fazer evoluir o comportamento dos alunos.

Artigue (1992) distingue dois tipos de variáveis potenciais: as variáveis macrodidáticas ou globais e as variáveis microdidáticas ou locais. As variáveis globais referem-se à organização global da engenharia e as variáveis locais estão relacionadas ao planejamento de uma sessão ou fase da sequência didática.

3ª Fase: Experimentação

É a etapa em que se aplica a sequência didática e que garante a relação entre prática e teoria. Pais (2001), afirma que a sequência didática é composta por certa quantidade de aulas, elaboradas e analisadas previamente com o objetivo de observar situações de aprendizagem, baseando-se nos conceitos determinados na pesquisa didática. As aulas da sequência didática são denominadas de sessões, por não se tratarem de aulas rotineiras.

4ª Fase: Análise a posteriori e validação

É a fase em que as informações obtidas durante a aplicação da sequência didática são analisadas. É relevante que os dados obtidos pela observação direta do pesquisador ou de uma equipe de aplicação da parte experimental sejam registrados de forma objetiva, para que a realidade dos alunos seja descrita e, quando possível, reveladas as estratégias de raciocínio utilizadas por eles.

Quanto à validação dos resultados, para obtê-la, deve-se confrontar os dados da análise a priori com os dados da análise a posteriori. Vale ressaltar que pelo fato da Engenharia Didática ser um procedimento metodológico que se baseia em registros de estudos de caso, sua validade é interna, pois se aplica a certo contexto.

Atualmente, muitas pesquisas têm utilizado sequências didáticas, elaboradas com base na teoria das Situações Didáticas de Brousseau, pois possibilitam analisar o dinamismo inerente à relação didática, no processo ensino-aprendizagem. A exemplo, temos Dornelas (2006), Lins Lessa (2005) e Carvalho (2008).

No que tange a essa questão, Jonnaert afirma que: *“esse dinamismo se explica pelas múltiplas mudanças nas relações com os saberes e os conhecimentos, e, nesse sentido, faz dos trabalhos dos didatas uma ciência viva”* (JONNAERT, 2002, p. 153).

Ainda de acordo com Jonnaert (2002), a Didática é uma ciência viva, e uma relação é considerada didática quando estão presentes três elementos fundamentais: um saber, um contrato didático que define os papéis de cada parceiro da relação e solidariedade entre os diferentes parceiros.

Isso suscita algumas reflexões acerca do que se passa na relação didática, como interagem entre si professor, aluno e saber, que condições determinam a possibilidade de evolução da relação com o saber a ponto de ocorrer aprendizagem. Podemos refletir sobre esse dinamismo a partir de vários referenciais. Adotaremos o referencial do Contrato Didático, uma vez que ele é um dos elementos centrais de discussão no nosso estudo.

Antes, porém de tratarmos do Contrato Didático, salientamos, mais uma vez, que utilizamos em nossa pesquisa as ideias que compõem a Engenharia Didática. Isto porque, fizemos uma análise a priori das possíveis estratégias que poderiam surgir na resolução das atividades da sequência didática que elaboramos. Também, a aplicação da sequência didática, assemelhasse ao que na Engenharia Didática é denominada de fase da Experimentação.

Passemos agora, ao Contrato Didático e suas especificidades.

1.4. O Contrato Didático

Brousseau (1996a) definiu o contrato didático como sendo o resultado das negociações entre professor e aluno, em relação a um saber específico. Essa noção extrapola a ideia de contrato no sentido legal do termo, porque enquanto um contrato no sentido legal do termo determina as regras para *“assegurar a* *sua estabilidade, o contrato didático terá antes como função dinamizar as regras, justamente para que as coisas ocorram..."* (JONNAERT, 2002, p.153).

De uma maneira mais ampla, o contexto escolar está permeado por diversos contratos escolares que se diferenciam do já mencionado contrato didático. Esses contratos regulam de modo mais ou menos preciso e claro negociações entre escola e sociedade, escola e famílias, escola e alunos, etc., e são mais convencionais e próximos do contrato no sentido estrito do termo.

As negociações e as expectativas que se estabelecem entre o professor e alunos, sem a mediação de um saber, estão relacionadas ao contrato pedagógico.

Brito Menezes (2006), por sua vez, discute que assim como o contrato didático, o contrato pedagógico tem um caráter que envolve tanto o explícito quanto o implícito, sendo que ele é fortemente fundamentado nas concepções do professor sobre o que é ensinar e o que é aprender.

Outro tipo de contrato que pode ser explorado é o contrato experimental. Schubauer-Leoni (1993), discute que nesse tipo específico de contrato, o objetivo não é que algo seja ensinado e aprendido. O seu lugar é o da investigação científica. Isso porque, esse contrato se estabelece em uma relação em que um investigador e um sujeito interagem na realização de uma tarefa experimental.

No contrato didático, de acordo com Jonnaert (2002), podem ser percebidos alguns elementos que diferenciam este contrato de outros tipos de contratos. Jonnaert (2002, p. 178) destaca três elementos importantes:

1. A ideia de compartilhar responsabilidades: a relação didática não está sob controle excessivo do professor, pois a responsabilidade do aprendiz é levada em conta: ele deverá aceitar realizar seu ofício de aluno.
2. Levar em conta o implícito: a relação didática funciona tanto, se não mais, sobre os "não-ditos" do que sobre regras formuladas explicitamente: o contrato didático se inquieta com esses "não ditos" e, mais do que isso, atribui-lhe um valor tão

importante quanto as regras formuladas explicitamente e pelas quais o professor e os alunos estão ligados.

3. A relação com o saber: o que é específico do contrato é levar em conta a relação que cada um dos parceiros mantém com o saber; o contrato didático considera a assimetria das relações do saber em jogo na relação didática.

Conforme esses elementos, percebemos que o professor, alunos e saber interagem entre si por meio de regras e convenções e que o contrato didático joga com os paradoxos da relação didática: implícito e explícito, unilateral e negociado, interno à aula e externo à aula, espontâneo e imposto. Com isso, as regras implícitas predominam sobre as explícitas e são em maioria responsáveis pelos conflitos em sala de aula, quando não se concretizam ou são transgredidas. E o que é realmente importante, de acordo com Brousseau (1996a), são essas rupturas do contrato didático.

Como uma exemplificação de ruptura de contrato didático, Brousseau (1987 *apud* Joannert 2002) descreve a metáfora da devolução didática.

> A devolução era um ato pelo qual o rei – por direito divino – abria mão do poder para atribuí-lo a uma câmara. A devolução significa: não sou eu quem quer, são vocês quem devem querer, mas eu lhes concedo esse direito, porque vocês não poderão assumi-los sozinhos. (1987, p. 43).

Através da devolução, o professor resolve não assumir o papel de ensinante, a fim de que o aluno demonstre atitudes de aprendizagem. Contudo para que a devolução exerça efeito sobre a aprendizagem, o aluno deve tê-la aceitado nas negociações do contrato didático. Essa devolução é uma regra explícita e o aluno sempre a espera, embora não saiba o momento certo em que o professor a explicitará. De acordo com Jonnaert (2002), a contradevolução ocorrerá quando as situações e estratégias adotadas pelo professor não são suficientes para que o aluno supere os obstáculos relativos ao saber e ele pede ao professor que aceite essa contradevolução.

Essas rupturas dinamizam a relação, por colocarem o aluno numa conduta de busca de significado, numa postura de aprendizagem. No entanto, ao se estabelecer um contrato didático, os elementos humanos envolvidos (professor e aluno), carregam consigo experiências oriundas de outros contratos, o que pode gerar alguns conflitos e serem necessárias renegociações.

Brousseau (1996a) afirma que a partir das relações e conflitos que unem os sujeitos é indicada a construção de um “modelo” de contrato didático. Assim, vejamos alguns desses modelos.

1.4.1 Modelos de contrato didático

Pais (2001) apresenta três modelos de contratos didáticos propostos por Brousseau, a partir da postura do professor frente ao aluno e valorização do saber.

O primeiro contrato didático enfatiza a relevância do conteúdo. Ou seja, o professor percebe-se como detentor único do conhecimento escolhendo o que é essencial para ser ministrado e não proporciona que o aluno participe do processo. O professor acredita que o aluno não conhece nada do que ele vai ensinar, e, sobretudo que se este se esvaziar do conhecimento não científico a aprendizagem se dará com maior sucesso.

No segundo modelo de contrato didático, enfatiza-se a relação entre aluno e saber, com o professor entrando em cena apenas para o acompanhamento da situação didática. Nesse caso, o princípio norteador é de que o aluno é quem deve empenhar-se em aprender e o professor não tem o poder de transmitir conhecimentos, a intervenção do professor é mínima e tem-se a impressão que o saber escolar flui espontaneamente.

No terceiro modelo de contrato didático, enfatiza-se a relação do aluno com o saber, porém o professor procura intervir de maneira mais compromissada considerando a aprendizagem nas dimensões individual e coletiva. Ele não se coloca mais como a fonte do saber, no entanto, não se destitui de sua docência e acompanha as etapas dessa aprendizagem, considerando os referenciais extra-escolares, planejando a situação didática com o cuidado de propor situações desafiadoras, de acordo com o nível cognitivo dos alunos. Nesse modelo de contrato didático, valoriza-se que o aluno porte-se ativamente na construção do seu conhecimento.

Charnay (1996), por sua vez, esquematizou e denominou cada um desses tipos de contrato didático. Ao primeiro, centrado no conteúdo, denominou de *normativo*. Ao segundo, centrado no aluno, denominou de *iniciativo*. E ao terceiro, centrado na construção do saber pelo aluno, denominou como *aproximativo.* Esquematicamente, temos nas figuras 2, 3 e 4 essas representações.

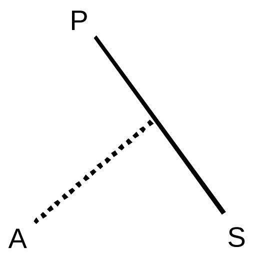


Figura 2 - Modelo Normativo

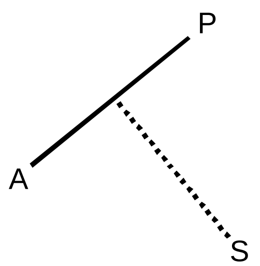


Figura 3 - Modelo Iniciativo

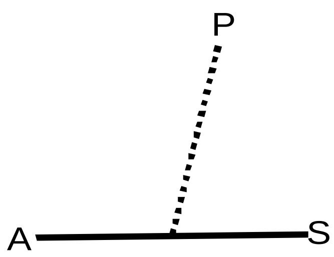


Figura 4 - Modelo Aproximativo

Fonte: Parra e Saiz, 1996, PP. 39-40

Os modelos apresentados permitem-nos refletir sobre as negociações, rupturas, e renegociações que se delineiam entre professor-aluno-saber, e sobre a possível influência dessas relações na aprendizagem. No entanto, discutiremos uma noção importante para compreendermos melhor o fato de que não se tem um único modo de olhar o Contrato Didático: a ideia de contrato diferencial.

1.4.2 O Contrato Didático Diferencial

Em seu estudo, Brito Menezes (2006), propõe uma análise do Contrato Didático salientando, conforme dissemos anteriormente, que ele não pode ser visto sob um único olhar. Com isso, essa autora discute as ideias de Schubauer-Leoni (1987, 1988a apud Brito Menezes 2006) sobre a existência de um Contrato Diferencial do professor em relação aos alunos. Nesse caso, cada professor não constrói o Contrato Didático da mesma maneira com cada grupo de alunos ou até mesmo com alunos individualmente, pois tende a 'escolher' (quase sempre de forma não consciente) certos alunos que supõe que serão bem sucedidos. Assim, prevê que "os escolhidos" aprenderão com facilidade, enquanto os demais alunos terão o fracasso escolar como iminente.

Diante do que apresentamos sobre o Contrato Didático, elaboramos uma sequência didática em que atividades pudessem favorecer que a aplicação dessa sequência fosse baseada nos moldes de um contrato didático do tipo aproximativo. Ainda, utilizamos a Teoria do Contrato Didático no momento da análise dos dados de nosso estudo, visto que observamos as negociações, rupturas e renegociações do Contrato Didático durante a aplicação da sequência didática pela professora.

Terminando então, a apresentação sobre as teorias referenciais para esse estudo, o capítulo seguinte se debruçará sobre a Progressão Aritmética, pólo do saber a ser abordado nessa pesquisa.

CAPÍTULO 2

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

O tópico Progressão Aritmética representa no triângulo das situações didáticas o pólo do saber. Apresentaremos esse conteúdo a partir de três contextos: contexto acadêmico (pesquisas que versam sobre P.A.), contexto dos documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais, Parâmetros Curriculares +, Orientações Curriculares para o Ensino Médio) e contexto da sala de aula (livro didático).

2.1. A Progressão Aritmética no contexto acadêmico

Para abordarmos a P.A. no contexto acadêmico, decidimos por discorrer sobre algumas pesquisas que têm tratado desse conteúdo algébrico, como é o caso dos estudos de Archilia (2008), Carvalho (2008), Solis (2008) e Ferreira (2009).

Essa foi nossa escolha porque entendemos que expormos o aprofundamento matemático da P.A. seria necessário se estivéssemos tratando em nosso estudo sobre como a P.A. é ensinada nos cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, acreditamos que ao relatarmos o que já se pesquisou sobre sequências didáticas de P.A. estaremos trazendo à tona reflexões mais propícias ao nosso estudo.

Daí, iniciemos por conhecer algumas das pesquisas.

2.1.2 Pesquisas sobre Progressão Aritmética

Para discorrermos sobre pesquisas que envolvem a P.A. analisamos os estudos de Archilia (2008), Carvalho (2008), Solis (2008) e Ferreira (2009). Percebemos que nessas pesquisas é valorizado o trabalho com a observação e generalização dos padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Passemos então ao comentário sobre cada um desses estudos.

Archilia (2008) investigou se os alunos do Ensino Médio constroem uma fórmula para o termo geral de uma P.A. Para isso, o pesquisador elaborou uma sequência didática embasado nos pressupostos da Engenharia Didática. Ele mesmo aplicou a sequência didática com seus alunos e constatou que embora alguns desses alunos tenham expressado em linguagem natural a fórmula do termo geral da P.A., não expressaram esse resultado na forma simbólica.

Carvalho (2008) pesquisou se alunos do 1º ano do Ensino Médio que ainda não haviam estudado P.A. generalizavam termos desse tipo de progressão. Em seu estudo ele propôs, para a construção dos dados, uma sequência didática com atividades baseadas em observação e generalização de padrões e usou para aplicar essas atividades, fases da Engenharia Didática que estão relacionadas com a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Carvalho (2008) constatou que os alunos referidos conseguiram generalizar termos da P.A. após observação, porém tal fato não os levou à construção da fórmula do termo geral devido à dificuldade de usarem a notação algébrica formal.

Ainda em sua pesquisa, Carvalho (2008) verificou que a sequência didática elaborada por ele, embora não tenha levado os alunos à construção da fórmula do termo geral, contribuiu para eles entenderem o processo de construção dessa fórmula e motivou-os durante o trabalho realizado na aplicação da sequência didática.

Solis (2008) buscou investigar o desenvolvimento cognitivo dos alunos na construção de conceitos e conhecimentos relacionados à sequência numérica e Progressão Aritmética, com ênfase no desenvolvimento de habilidades de argumentação e prova. Em sua pesquisa, ele usou alguns princípios da Engenharia Didática, elaborou uma sequência didática e assumiu o papel de professor/pesquisador durante a aplicação de cada sessão das atividades.

Solis (2008), também usou um software para que os alunos respondessem as atividades e com isso, seu estudo também investigou se o uso desse software contribuiu para motivar os alunos durante as atividades.

Com esse estudo, ele pôde verificar que a sequência de atividades permitiu aos alunos a construção de conceitos relativos à sequência numérica e P.A. desenvolvendo a habilidade de argumentação e prova e assim esses alunos construíram a fórmula do termo geral.

Para concluirmos, temos a pesquisa de Ferreira (2009) que objetivou investigar como o aluno que terminou o 1º ano do Ensino Médio em 2008, observa, realiza e compreende as tarefas de observação de regularidades e generalização de padrões. A pesquisadora também elaborou e aplicou uma sequência de P.A. inspirando-se nas ideias da Engenharia Didática e verificou que alguns alunos observaram as regularidades presentes em sequências, realizaram algumas generalizações de padrões usando estratégias diversas para resolver os problemas apresentados.

No entanto, no que tange à compreensão, ela evidenciou que havia a necessidade de outras experiências para aperfeiçoar nos alunos a fluência algébrica e assim estes alunos utilizarem de modo mais apropriado a linguagem algébrica.

Diante do exposto, percebemos que em todas essas pesquisas citadas foi ressaltada a importância do trabalho com atividades exploratórias e investigativas nas quais os alunos são instigados a pensar genericamente, perceber regularidades e explicitá-las por meio de expressões matemáticas. Sobre esse aspecto, tais pesquisas se fundamentaram nos estudos de Vale e Pimentel (2005), que consideram o trabalho com padrões a base do pensamento algébrico e alternativa poderosa e eficiente para desenvolvimento do pensamento e a linguagem algébrica.

Ressaltamos que nosso estudo embora tenha objetivos diferentes das pesquisas descritas, possui alguns aspectos semelhantes já que para investigarmos como a professora negocia o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada, para o ensino de Progressão Aritmética, construímos uma sequência didática nos moldes da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e utilizamos alguns aspectos da Engenharia Didática.

Cientes da relevância dos trabalhos apresentados para refletirmos sobre o ensino e aprendizagem de P.A., vejamos então como os documentos de orientação curricular indicam ser a abordagem mais apropriada desse conteúdo.

2.2 A Progressão Aritmética nos documentos de orientação curricular

Conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação - LDB – Lei nº 9394/96 (BRASIL, 1996), o Ensino Médio tem como objetivos centrais não apenas consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no nível fundamental, a fim de garantir a continuidade dos estudos, mas deve também preparar para o trabalho e exercício da cidadania, contribuir para a formação ética e desenvolver a autonomia intelectual dos alunos.

Partindo desses aspectos, as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) devem considerar, em todas as disciplinas, esse conjunto amplo de competências e habilidades a serem desenvolvidas. Na Matemática, especificamente, espera-se que ao final dessa etapa da escolaridade os alunos saibam utilizar os conhecimentos matemáticos para resolverem problemas práticos do cotidiano, modelarem fenômenos de outras áreas, compreenderem essa ciência com características próprias, como um conjunto de conhecimentos historicamente e socialmente construídos, bem como sua importância para o desenvolvimento científico e tecnológico.

Sendo assim, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2008) trazem indicações sobre a escolha dos conteúdos e a maneira de trabalhá-los. Em relação ao último item, destacamos que a Progressão Aritmética (pólo do saber), no referente documento, é definida como uma função afim, em que o domínio é o conjunto dos números naturais e também que tal conteúdo não deve ser tratado como um tópico independente sem relação com as funções já estudadas.

Ainda como orientação, esse documento aponta que devem ser evitados exaustivos conjuntos de cálculos que fazem apenas o uso de fórmulas, como por exemplo: calcule o 18º termo, determine a quantidade de termos, etc. Isso nos remete à reflexão de que os documentos de orientação curricular propõem aos professores a realização de situações didáticas que sejam permeadas por um contrato didático que se diferencia do que costumeiramente é visto no ambiente escolar e que oportunizem situações que sejam favoráveis à construção do conhecimento pelo aluno.

Essa orientação está de acordo com o enfatizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, os quais afirmam que *"as sequências, em especial progressões aritméticas e geométricas, nada mais são que particulares funções."* (BRASIL,1999). Também está de acordo com os Parâmetros Curriculares + (BRASIL, 2002), que indicam, em relação ao estudo das sequências, ser necessário garantir uma abordagem relacionada à idéia de função.

2.3 A Progressão Aritmética no livro didático

Para realizarmos a discussão sobre a P.A. no livro didático iremos analisar brevemente como se dá a abordagem desse conteúdo matemático e como é apresentada a fórmula do termo geral de uma P.A. em quatro livros, entre os oito recomendados e aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (2009) e adotados na rede pública estadual de ensino de PE.

A escolha de quatro livros deu-se pelo fato de que entre os oito livros aprovados pelo PNLEM (2009), conseguimos ter acesso apenas a quatro deles livros, e como o objetivo principal de nossa pesquisa não é análise de livro didático, mas consideramos importante fazermos uma breve análise de como o conteúdo, pólo do saber, é abordado nos livros didáticos, acreditamos que 50% do total dos livros recomendados é suficiente e relevante para contribuir com o nosso objeto de estudo.

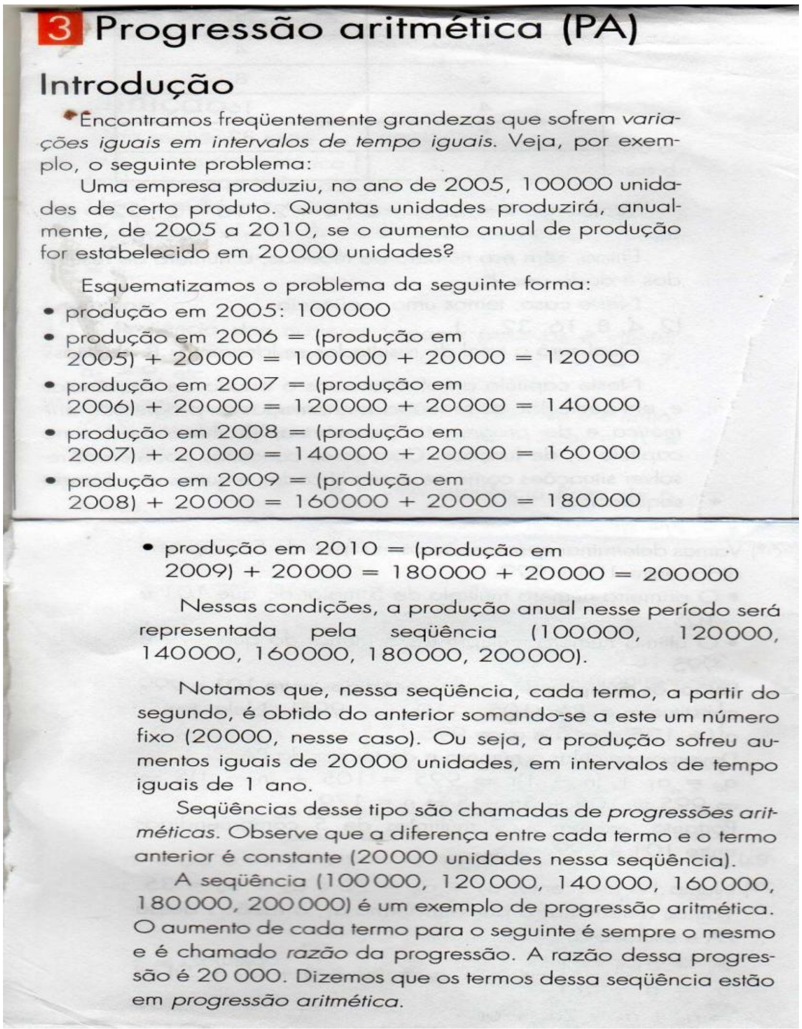
Assim, os livros que escolhemos para uma breve análise foram o de Dante (2008), de Paiva (2005), de Giovanni (2005) e o de Smole (2005).

Faremos em primeiro momento a análise de como é abordada a Progressão Aritmética e em segundo momento, de como é apresentada a fórmula do termo geral.

2.3.1 Abordando Progressão Aritmética

Para fazermos a análise, observaremos em cada livro a consonância com o que é recomendado nos documentos oficiais de orientação curricular, sobre os quais discorremos no subitem 2.2. Passemos então às considerações:

Em Dante (2008), o conteúdo de Progressão Aritmética é introduzido a partir de uma situação, que é apresentada inicialmente e resolvida para então proporcionar que o aluno entenda o conteúdo referido. Vejamos então essa situação no recorte do livro:



3 Progressão aritmética (PA)

Introdução

Encontramos freqüentemente grandezas que sofrem *variações iguais em intervalos de tempo iguais*. Veja, por exemplo, o seguinte problema:

Uma empresa produziu, no ano de 2005, 100000 unidades de certo produto. Quantas unidades produzirá, anualmente, de 2005 a 2010, se o aumento anual de produção for estabelecido em 20000 unidades?

Esquematizamos o problema da seguinte forma:

- produção em 2005: 100000
- produção em 2006 = (produção em 2005) + 20000 = 100000 + 20000 = 120000
- produção em 2007 = (produção em 2006) + 20000 = 120000 + 20000 = 140000
- produção em 2008 = (produção em 2007) + 20000 = 140000 + 20000 = 160000
- produção em 2009 = (produção em 2008) + 20000 = 160000 + 20000 = 180000
- produção em 2010 = (produção em 2009) + 20000 = 180000 + 20000 = 200000

Nessas condições, a produção anual nesse período será representada pela seqüência (100000, 120000, 140000, 160000, 180000, 200000).

Notamos que, nessa seqüência, cada termo, a partir do segundo, é obtido do anterior somando-se a este um número fixo (20000, nesse caso). Ou seja, a produção sofreu aumentos iguais de 20000 unidades, em intervalos de tempo iguais de 1 ano.

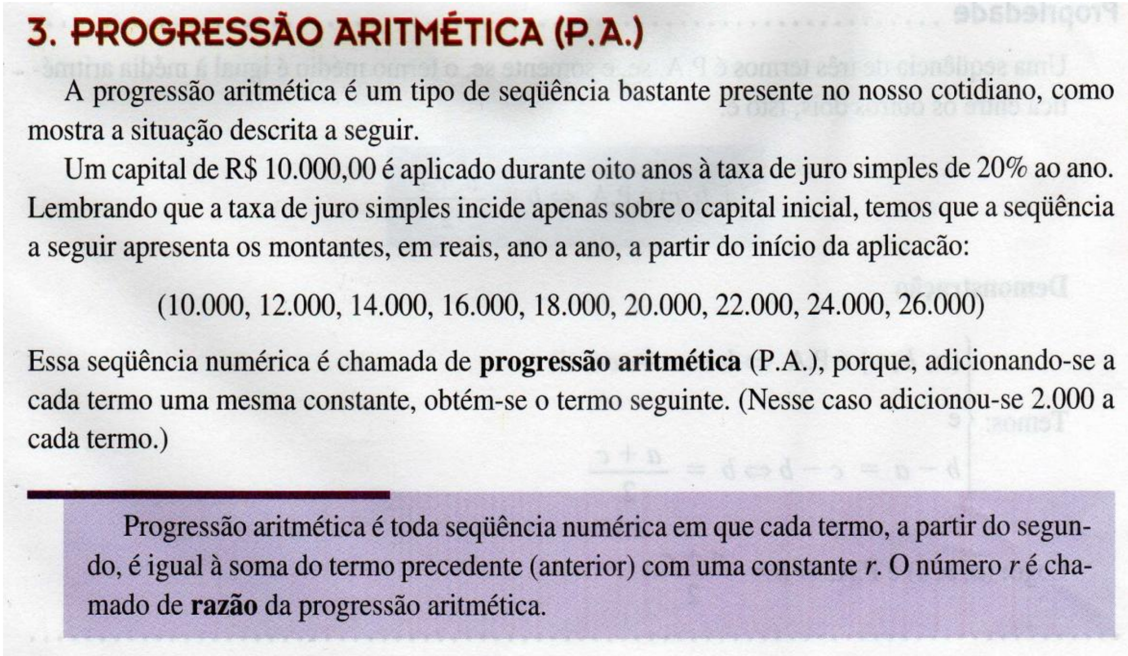
Seqüências desse tipo são chamadas de *progressões aritméticas*. Observe que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante (20000 unidades nessa seqüência).

A seqüência (100 000, 120 000, 140 000, 160 000, 180 000, 200 000) é um exemplo de progressão aritmética. O aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo e é chamado *razão* da progressão. A razão dessa progressão é 20 000. Dizemos que os termos dessa seqüência estão em *progressão aritmética*.

Figura 05: Recorte de Dante, 2008, pp. 136-137.

Na figura 05, observamos que a Progressão Aritmética é abordada por meio de uma situação, e posteriormente, Dante (2008) apresenta os passos necessários à resolução da situação proposta. Salientamos que embora o referido autor forneça a solução da situação proposta, tal abordagem da P.A. pode contribuir para que o aluno perceba que esse conteúdo matemático não é desprovido de usualidade. Logicamente que isso só será possível se o professor, como aquele que gere “o jogo didático”, tiver uma concepção de ensino e aprendizagem que o impulsione a favorecer a construção do conhecimento pelo aluno.

Passemos então ao livro de Paiva (2005, p. 187).



3. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

A progressão aritmética é um tipo de seqüência bastante presente no nosso cotidiano, como mostra a situação descrita a seguir.

Um capital de R$ 10.000,00 é aplicado durante oito anos à taxa de juro simples de 20% ao ano. Lembrando que a taxa de juro simples incide apenas sobre o capital inicial, temos que a seqüência a seguir apresenta os montantes, em reais, ano a ano, a partir do início da aplicação:

(10.000, 12.000, 14.000, 16.000, 18.000, 20.000, 22.000, 24.000, 26.000)

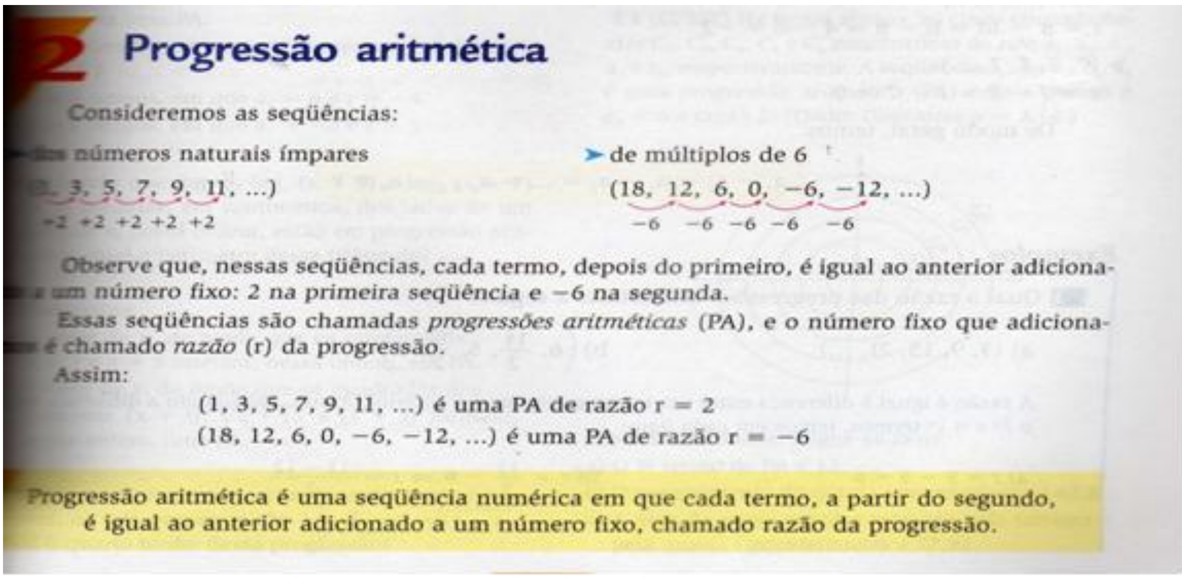
Essa seqüência numérica é chamada de **progressão aritmética** (P.A.), porque, adicionando-se a cada termo uma mesma constante, obtém-se o termo seguinte. (Nesse caso adicionou-se 2.000 a cada termo.)

Progressão aritmética é toda seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante *r*. O número *r* é chamado de **razão** da progressão aritmética.

Figura 06: Recorte de Paiva, 2005, p. 187.

Para a abordagem de P.A., constatamos que Paiva (2005) também inicia com uma situação. No entanto, não desenvolve a resolução como foi visto em Dante (2008), mas apresenta de maneira sintética a solução, para então definir o que é P.A.

Vejamos como é introduzida a P.A. no livro de Giovanni (2005, p. 353).



2 Progressão aritmética

Consideremos as seqüências:

- números naturais ímpares

  (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...)

  +2 +2 +2 +2 +2

- de múltiplos de 6

  (18, 12, 6, 0, −6, −12, ...)

  −6 −6 −6 −6 −6

Observe que, nessas seqüências, cada termo, depois do primeiro, é igual ao anterior adicionado a um número fixo: 2 na primeira seqüência e −6 na segunda.

Essas seqüências são chamadas *progressões aritméticas* (PA), e o número fixo que adiciona-se é chamado *razão* (r) da progressão.

Assim:

(1, 3, 5, 7, 9, 11, ...) é uma PA de razão r = 2

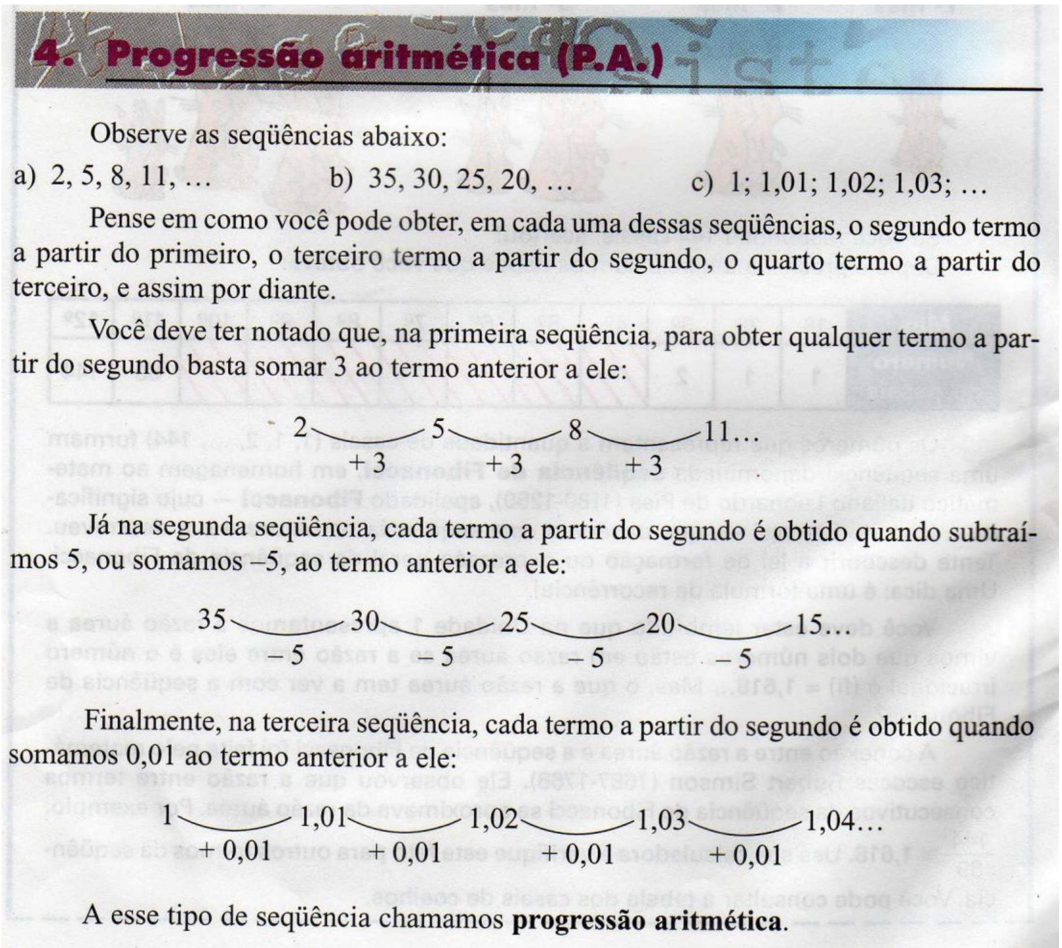
(18, 12, 6, 0, −6, −12, ...) é uma PA de razão r = −6

Progressão aritmética é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão.

Figura 07: Recorte de Giovanni, 2005, p. 353.

Conforme podemos observar, o livro de Giovanni (2005) traz uma abordagem de P.A. diferente dos livros de Paiva e Dante, pois não começa por meio de uma situação. A abordagem de P.A. em Giovanni (2005) parte de duas sequências numéricas e posteriormente, explicita a definição desse conteúdo matemático, o que ressalta o fato de que há ausência de uma provocação didática que motive o aluno no processo de aprendizagem e desperte sua curiosidade pelo assunto tratado.

Passemos agora ao último livro a ser analisado, que é o de Smole (2005, p. 166).



4. Progressão aritmética (P.A.)

Observe as seqüências abaixo:

a) 2, 5, 8, 11, … b) 35, 30, 25, 20, … c) 1; 1,01; 1,02; 1,03; …

Pense em como você pode obter, em cada uma dessas seqüências, o segundo termo a partir do primeiro, o terceiro termo a partir do segundo, o quarto termo a partir do terceiro, e assim por diante.

Você deve ter notado que, na primeira seqüência, para obter qualquer termo a partir do segundo basta somar 3 ao termo anterior a ele:

$$2 \underbrace{\quad}_{+3} 5 \underbrace{\quad}_{+3} 8 \underbrace{\quad}_{+3} 11\ldots$$

Já na segunda seqüência, cada termo a partir do segundo é obtido quando subtraímos 5, ou somamos –5, ao termo anterior a ele:

$$35 \underbrace{\quad}_{-5} 30 \underbrace{\quad}_{-5} 25 \underbrace{\quad}_{-5} 20 \underbrace{\quad}_{-5} 15\ldots$$

Finalmente, na terceira seqüência, cada termo a partir do segundo é obtido quando somamos 0,01 ao termo anterior a ele:

$$1 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}01 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}02 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}03 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}04\ldots$$

A esse tipo de seqüência chamamos **progressão aritmética**.

Figura 08: Recorte de Smole, 2005, p. 166.

Conforme podemos observar, o livro de Smole (2005) traz uma abordagem de P.A., utilizando como Giovanni (2005), sequências numéricas. Percebemos, no entanto, que Smole propõe um questionamento a partir do momento que expõe as sequências numéricas, o que faz com que essa abordagem se diferencie da de Giovanni, visto que o aluno é convidado a refletir sobre o conhecimento que se deseja apresentar. Sendo assim, essa abordagem, embora desprovida de uma situação mais próxima das situações cotidianas, priorizou a produção de conjecturas pelos alunos.

Diante da breve reflexão sobre as abordagens de P.A. em quatro dos oito livros de Matemática recomendados e aprovados no PNLEM (BRASIL, 2009), pudemos observar que dois desses livros partem de situações reais para contextualizar o conteúdo referido. Essa abordagem, segundo os documentos oficiais, pode contribuir para a formação do aluno de maneira a ajudá-lo a utilizar os conhecimentos matemáticos para resolver problemas práticos do cotidiano.

2.3.2 Fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética

Vejamos agora, como é apresentada a fórmula do termo geral da P.A. nos livros que escolhemos.

Em Dante (2008, p. 137) temos:

Fórmula do termo geral de uma PA

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão **r**, partindo do 1º termo, para avançar um termo basta somar **r** ao 1º termo $(a_2 = a_1 + r)$; para avançar dois termos basta somar 2r ao 1º termo $(a_3 = a_1 + 2r)$; para avançar três termos basta somar 3r ao 1º termo $(a_4 = a_1 + 3r)$; e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem **n**, denominado *termo geral* da PA, que é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

(ao passar de $\mathbf{a_1}$ para $\mathbf{a_n}$, avançamos $(n - 1)$ termos, ou seja, basta somar $(n - 1)$ vezes a razão ao 1º termo)

Nessa fórmula temos:

- a_n = termo geral
- a_1 = 1º termo
- n = número de termos (até $\mathbf{a_n}$)
- r = razão da PA

Figura 09: Recorte de Dante, 2008, p. 137.

Observamos que em Dante (2008) a fórmula do termo geral está sendo apresentada a partir da definição de Progressão Aritmética e instigando o aluno a perceber uma regularidade da P.A. para então, propor a generalização para o termo de ordem n. Essa apresentação, utiliza a definição de P.A. para chegar à fórmula do termo geral, no entanto, faz isso de maneira resumida, ou seja, sem explorar os momentos em que, o princípio da igualdade é aplicado como vimos no subitem 2.1.

Em Paiva (2005, p. 189) temos:

Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

Voltando à situação descrita na introdução do item 3, vimos que a P.A.

(10.000, 12.000, 14.000, 16.000, 18.000, 20.000, 22.000, 24.000, 26.000)

apresenta os montantes, em reais, ano a ano, a partir do início da aplicação.

Observe que podemos calcular o montante acumulado ao final de cada ano de aplicação adicionando ao capital inicial múltiplos de 2.000. Por exemplo, para calcular o 2º montante, basta efetuar 10.000 + 2.000.

Note que o resultado é o segundo termo da P.A., em que $a_1 = 10.000$ e $r = 2.000$, isto é, $a_2 = a_1 + r$. Raciocinando de modo análogo, temos: $a_3 = a_1 + 2r$, $a_4 = a_1 + 3r$, $a_5 = a_1 + 4r$, ...; $a_9 = a_1 + 8r$.

Essa idéia pode ser generalizada para qualquer P.A., como veremos a seguir.

Consideremos a P.A. de razão r: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots)$

Qualquer termo dessa P.A. pode ser representado em função de a_1 e r, observe:

$$(\underbrace{a_1 + 0r}_{a_1}, \underbrace{a_1 + 1r}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3r}_{a_4}, \ldots),$$

isto é, qualquer termo a_n é igual à soma de a_1 com o produto $(n - 1)r$, ou seja, a **fórmula do termo geral da P.A.** pode ser expressa por:

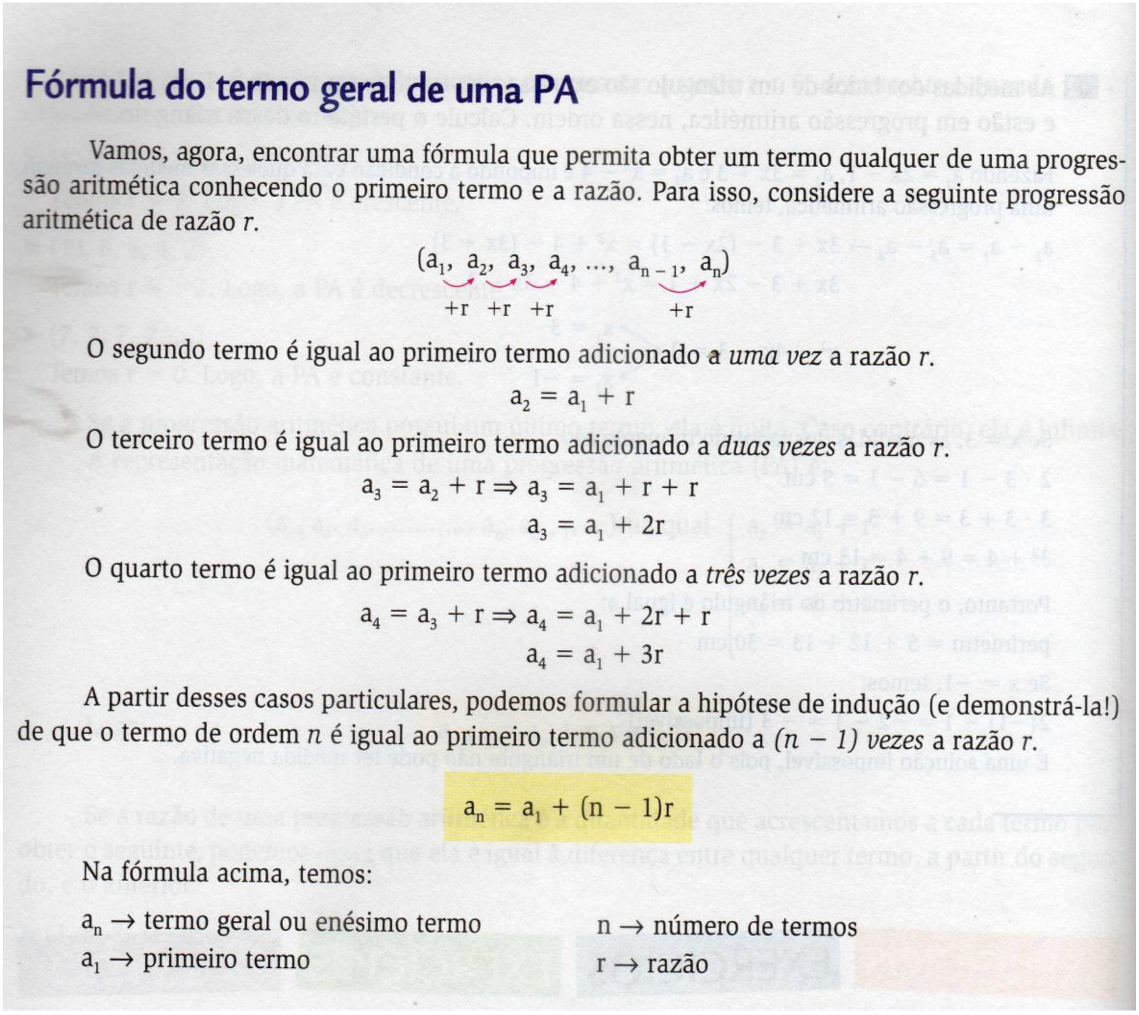
$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Figura 10: Recorte de Paiva, 2005, p. 189.

Diante do exposto, observamos que em Paiva (2005) para chegar à fórmula do termo geral é usado um raciocínio semelhante ao explicitado em Dante (2008).

Percebemos que o diferencial é que em Paiva (2005) ele retoma a situação que iniciou a abordagem de P.A. e partiu dela para generalizar o raciocínio e fazer com que o aluno entenda a fórmula do termo geral.

Em Giovanni (2005, p. 356) vemos:



Fórmula do termo geral de uma PA

Vamos, agora, encontrar uma fórmula que permita obter um termo qualquer de uma progressão aritmética conhecendo o primeiro termo e a razão. Para isso, considere a seguinte progressão aritmética de razão *r*.

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n)$$
$$+r\quad +r\quad +r\qquad\qquad +r$$

O segundo termo é igual ao primeiro termo adicionado a *uma vez* a razão *r*.

$$a_2 = a_1 + r$$

O terceiro termo é igual ao primeiro termo adicionado a *duas vezes* a razão *r*.

$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + r + r$$
$$a_3 = a_1 + 2r$$

O quarto termo é igual ao primeiro termo adicionado a *três vezes* a razão *r*.

$$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 2r + r$$
$$a_4 = a_1 + 3r$$

A partir desses casos particulares, podemos formular a hipótese de indução (e demonstrá-la!) de que o termo de ordem *n* é igual ao primeiro termo adicionado a *(n − 1) vezes* a razão *r*.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Na fórmula acima, temos:

$a_n \rightarrow$ termo geral ou enésimo termo
$a_1 \rightarrow$ primeiro termo
$n \rightarrow$ número de termos
$r \rightarrow$ razão

Figura 11: Recorte de Giovanni, 2005, p. 356.

Com o exposto, percebemos em Giovanni (2005), a fórmula do termo geral foi demonstrada sem resgatar o que foi apresentado na abordagem inicial de P.A. nesse livro didático. Porém, é utilizado o mesmo raciocínio que os dois livros que já comentamos, ou seja, parte da definição de P.A. e utiliza o particular para chegar a uma generalização.

Em Smole (2005, p. 169), a fórmula do termo geral é apresentada do seguinte modo:

Fórmula do termo geral de uma P.A.

Aplicando a definição de progressão aritmética à P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ de razão **r**, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + r = a_1 + (n-2)r \\ a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r \end{cases}$$

Expressando de outra forma, se somarmos membro a membro essas (n – 1) igualdades, obtemos:

$$\underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1}}_{\text{cancelam-se}} + a_n = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}_{\text{cancelam-se}} + \underbrace{r + r + r + \ldots + r}_{(n-1)\text{ parcelas}}$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r,\ n \geqslant 2}$$

Esta relação é chamada de **fórmula do termo geral de uma P.A.** e possibilita calcular qualquer termo da seqüência desde que sejam conhecidos a_1 e **r**.

Figura 12: Recorte de Smole, 2005, p. 169.

Observamos que em Smole (2005) conforme aparece nos demais livros já comentados, a fórmula do termo geral é apresentada partindo da definição da P.A. O que nos chamou a atenção é que o texto é praticamente o mesmo que há em Iezzi (1993), que é um livro voltado para o ensino superior. Vejamos na figura

IV. FÓRMULA DO TERMO GERAL

9. Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.A. e admitindo dados o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$\underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}_{\text{cancelam-se}} + (n-1) \cdot r$$

e, então, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, o que sugere o seguinte

10. Teorema

Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ézimo termo é

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Demonstração pelo princípio da indução finita

I) Para $n = 1$, temos: $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r$ (sentença verdadeira)

II) Admitamos a validade da fórmula para $n = p$: $a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r$ (hipótese de indução) e provemos que vale para $n = p + 1$:

$a_{p+1} = a_p + r = (a_1 + (p - 1) \cdot r) + r = a_1 + [(p + 1) - 1] \cdot r$

Então $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Figura 13: Recorte de Iezzi, 1993, p. 9.

Diante do que expomos, salientamos que entendemos que todos os quatro livros não apresentaram discordância no raciocínio utilizado para a fórmula citada. No entanto, salientamos que dos quatro livros que tivemos acesso apenas o livro de Paiva (2005) esclareceu a referida fórmula estabelecendo uma conexão com a situação proposta no início da abordagem de P.A. nesse livro.

A partir do que analisamos nos documentos de orientação curricular e nos livros didáticos que tivemos acesso, elaboramos em nosso estudo, uma sequência didática que é baseada na Teoria das Situações de Brousseau, por entendermos que essa sequência aborda a Progressão Aritmética a partir de um conjunto de atividades em que os alunos estabelecem estratégias de resolução, comunicam essas estratégias, levantam hipóteses, testam essas hipóteses, para então compreenderem o que é P.A. e entenderem a fórmula do termo geral.

Ressaltamos, porém, que em nossa sequência didática resolvemos não seguir as recomendações propostas pelos documentos de orientações curriculares, visto que não era nossa intenção estabelecer uma quebra tão contundente com o que a professora, sujeito de nossa pesquisa, estava habituada, já que os livros didáticos aos quais ela tem acesso não abordam a P.A. partindo da ideia de função.

Sendo assim, embora os documentos de orientação curricular indiquem que se associe a abordagem de P.A. ao estudo das funções, utilizamos para elaborarmos a sequência didática, a ideia dos livros didáticos que analisamos e que são adotados na rede pública estadual de PE, que é a abordagem por meio de uma situação do cotidiano a fim de motivar o aluno à busca do saber que desejamos que ele construa, no caso, Progressão Aritmética .

Diante do que explicitamos, passaremos à metodologia utilizada para a pesquisa.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos a metodologia utilizada para a realização desse estudo de campo, que será explicitada em cinco momentos. Num primeiro momento, retomaremos o objetivo central da pesquisa e situaremos os sujeitos envolvidos. Em segundo momento, faremos uma discussão sobre a natureza do nosso estudo. Num terceiro momento, apresentaremos como construímos os dados e, posteriormente, apresentaremos as etapas da investigação. Finalmente, explicitaremos como foram analisados os dados.

3.1 Objetivo e sujeitos da pesquisa

O objetivo desse estudo, como foi anteriormente citado, foi investigar como a professora negocia o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada, para o ensino de Progressão Aritmética.
Participaram desse estudo uma professora e seus respectivos alunos do 2º ano do ensino médio, de uma escola da rede pública estadual de ensino.

Escolhemos o 2º ano do ensino médio porque a professora, sujeito de nossa pesquisa, ensina P.A. no 2º ano, já que esse conteúdo geralmente é ensinado no 1º ou 2º do Ensino Médio. A escolha da escola pública aconteceu por conhecermos o trabalho pedagógico da professora, sujeito de nossa pesquisa, e prevermos que ela não se oporia a aplicar a sequência didática de P.A. e contribuir para nosso estudo.

3.2 Natureza da pesquisa

Uma pesquisa qualitativa, de acordo com Ludke e André (1986), pode ser caracterizada como sendo aquela em que o pesquisador tem como fonte direta dos dados o ambiente natural, sendo esses dados obtidos descritivamente, e cuja preocupação predominante é com o processo e não com o produto. Em pesquisas dessa natureza não se buscam evidências para comprovação de hipóteses pré-definidas, ao contrário, os dados são construídos a partir do contexto de investigação.

Sendo assim, pelo fato de nossa pesquisa se interessar pela compreensão dos fenômenos didáticos que emergem quando uma professora aplica uma sequência didática de P.A. que foi elaborada por uma pesquisadora, nós a caracterizamos como uma pesquisa de natureza qualitativa.

Enfocamos essencialmente, como já foi mencionado, de que maneira as regras estabelecidas para a aplicação de uma sequência didática, elaborada pela pesquisadora para o ensino de Progressão Aritmética, foram negociadas por uma professora em uma sala de aula do 2º ano do Ensino Médio.

3.3 Construção dos dados

Partindo do fato desta pesquisa ser de natureza qualitativa, entendemos que os dados são construídos, ou seja, não estão prontos para serem ‘coletados’, visto que até mesmo o pesquisador, a quem é inerente uma subjetividade, também os produzirá. Na pesquisa qualitativa tem-se entendimento que o pesquisador não apenas ‘captura’ esses dados, e os comunica na íntegra, mas os percebe com seu próprio olhar.

Conscientes desse aspecto, fizemos o possível para que tal fator não se constituísse como um entrave para o estudo, ou que os dados pudessem ser enviesados pelas expectativas da pesquisadora. Detalharemos então, mais claramente como construímos os dados.

A videografia foi um dos recursos que utilizamos para a produção dos dados, pois filmamos todas as aulas em que a sequência didática para o ensino de P.A. foi aplicada.

Embora haja críticas sobre o fato de que esse recurso pode interferir nos eventos do ambiente natural do contexto da pesquisa, podendo produzir certa artificialidade nas ações dos participantes, acreditamos que num processo de pesquisa mais demorado, ‘a novidade’ aos poucos vai sendo incorporada ao ambiente. Sendo assim, mesmo atentando a essa e outras questões que podem vir a enviesar uma pesquisa, percebemos que esse recurso é o que nos deu em melhores condições a dinâmica do ambiente de estudo, em nosso caso, da sala de aula.

Também fizemos um diário de campo das aulas em que a sequência didática foi aplicada. Neste diário, fizemos anotações descrevendo momentos das aulas que julgamos relevantes baseando-se nos fundamentos teóricos e nos objetivos da pesquisa e tecemos considerações sobre tais momentos.

3.4 Etapas da investigação

A investigação foi realizada em quatro etapas principais:

1. Elaboração da sequência didática pela pesquisadora;
2. Análise a priori das atividades da sequência didática;
3. Entrevista com a professora e apresentação da proposta da sequência didática pela pesquisadora;
4. Aplicação da sequência didática de P.A.

Passemos à explictação de cada uma das etapas da investigação.

3.4.1 Elaboração da sequência didática pela pesquisadora

Nessa etapa, a pesquisadora elaborou uma sequência didática para o ensino de P.A., buscando subsídios na Teoria das Situações Didáticas, Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2008) e em livros recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM) que são utilizados na rede pública estadual de Pernambuco.

Embora a proposta não tenha sido a de realização de uma Engenharia Didática, nossa pesquisa pautou-se em algumas das etapas dessa metodologia: análise preliminar, análise a priori, experimentação e análise a posteriori. Além disso, a sequência didática contemplou das fases propostas pela literatura na Teoria das Situações Didáticas: situações de ação, de formulação, de validação e de institucionalização que foram explicitadas na seção 1.2.2 o que tendeu a exigir do professor negociações, durante a aplicação da sequência didática, baseadas nos moldes de um contrato didático do tipo aproximativo.

3.4.2 Sequência Didática sobre Progressão Aritmética

A sequência didática foi elaborada para ser aplicada em duas sessões. Cada uma das sessões referiu-se a um período de duas aulas de 50 minutos (geminadas). A atividade inicial da 1ª sessão foi proposta para ser realizada individualmente. As demais atividades da 1ª e 2ª sessão deveriam ser realizadas em grupo.

Optamos pelo trabalho em grupo, pois ele possibilita o que é proposto por Brousseau na Teoria das Situações Didáticas: momentos de ação, formulação e validação, aumentando as chances de produção de conjecturas e possibilitando o surgimento de ricos conflitos cognitivos, muito mais do que se os alunos estiverem trabalhando individualmente.

Para um melhor entendimento da estrutura e da maneira que foi proposta a aplicação da referida sequência, explicitaremos em relação à 1ª e 2ª sessão:

- os objetivos de cada sessão;
- as atividades de cada sessão;
- objetivos de cada um dos itens das atividades de cada sessão;
- orientações da pesquisadora sobre os procedimentos a serem adotados pela professora para a realização de cada sessão.

Posteriormente à explicitação da dinâmica das sessões da sequência de P.A. apresentaremos a análise a priori que fizemos das possíveis estratégias para cada item das atividades da sequência didática.

Ressaltamos, portanto, que a explicitação das sessões da sequência didática de P.A. contemplará aspectos referentes às atividades que compõem cada sessão e às orientações para a aplicação de cada atividade.

3.4.2.1 Estrutura da 1ª Sessão da sequência didática de P.A. e orientações para a aplicação

Objetivo da 1ª sessão:

- Caracterizar uma Progressão Aritmética.

Atividades da 1ª sessão

Atividade 1

P_1

> *Um contribuinte esqueceu-se de pagar certo imposto. Verificou então que haveria multa pelo atraso, que deveria ser paga do seguinte modo: no primeiro dia após o vencimento, a multa seria de R$ 38,00; a cada dia, a partir do segundo dia de atraso, seriam acrescidos R$ 5,00 à multa do dia anterior. Construa uma tabela mostrando o*

quanto esse contribuinte deve pagar de multa se atrasar 1 dia, 2 dias, 3 dias, 4 dias, 18 dias e n dias. (PAIVA, 2005, p. 191).

Objetivo da atividade 1, da 1ª sessão.

Na atividade 1, o aluno deve:

- Estabelecer estratégias diversas para resolver o problema P_1.

Atividade 2

Observe as construções.

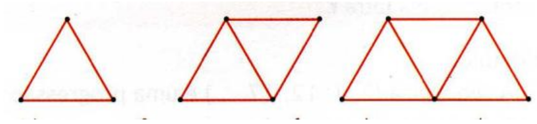


Figura 14 - Construção com triângulos

Fonte: Dante, 2008, p. 136.

1. Mantendo o padrão representado na figura, utilize palitos de fósforo e represente como ficará a 4ª e a 5ª construção.
2. Represente por meio de um desenho como ficaria a 8ª construção.
3. Preencha a tabela abaixo de acordo com o que realizou no item 1.

Construção	1	2	3	4	5
Quantidade de palitos					

4. Explique como é formada a sequência de números referente à quantidade de palitos.

5. Mantendo o padrão representado na figura, quantos palitos serão usados na 15ª construção? Explique como você encontrou o resultado.

Objetivos dos itens da atividade 2, da 1ª sessão.

1ª SESSÃO	OBJETIVO DA ATIVIDADE
1. Mantendo o padrão representado na figura, utilize palitos de fósforo e	Perceber o padrão de regularidade do ponto de vista estético.

<table>
<tr><td>represente como ficará a 4ª e a 5ª construção.</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Represente por meio de um desenho como ficaria a 8ª construção.</td><td>Perceber o padrão de regularidade do ponto de vista estético.</td></tr>
<tr><td>3. Preencha a tabela abaixo de acordo com o que realizou no item 1.
<table>
<tr><td>Construção</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Quantidade de palitos</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>Perceber a relação entre construção e número de palitos utilizados para cada construção, no sentido de entender a regularidade da sequência.</td></tr>
<tr><td>4. Explique como é formada a sequência de números referente à quantidade de palitos.

5. Mantendo o padrão representado na figura, quantos palitos serão usados na 15ª construção? Explique como você encontrou o resultado.</td><td>Caracterizar a estratégia usada para o cálculo de termo de uma sequência numérica.</td></tr>
</table>

Quadro 01: Detalhamento da 1ª Sessão.

Orientações da pesquisadora sobre os procedimentos a serem adotados pela professora para aplicação da sequência didática:

A professora deve iniciar a 1ª sessão distribuindo o problema $P_{1.}$

Após a distribuir P_1, deve ler juntamente com os alunos e pedir que eles tentem resolver individualmente, registrando as estratégias de resolução.

Depois desse momento, ela deve pedir para os alunos relatarem as estratégias utilizadas para resolver o problema.

A professora, no entanto, não deverá validar nenhuma das soluções apresentadas pelos alunos, mas falar para eles que ao final das atividades o problema P_1 será retomado por ela.

Em seguida, deve dispor os alunos em grupo, entregar a cada grupo uma cartolina, caixa de fósforos e atividades a serem desenvolvidas, explicitar que as soluções devem ser registradas na cartolina para ao final serem apresentadas para os demais colegas. Também, deve explicar que as atividades devem ser respondidas sem a ajuda da professora.

Depois do momento de produção em grupo, os grupos devem apresentar suas produções para os demais alunos.

Posteriormente às apresentações de cada grupo, a professora deve exprimir para a classe uma explicação baseada no seguinte texto:

Considerando os resultados das quantidades de palitos necessárias para as construções 1, 2, 3, 4 e 5, temos a sequência numérica 3, 5, 7, 9, 11. Observamos que a quantidade de palitos, a partir da 2ª construção é igual à quantidade de palitos da construção anterior adicionada a um número fixo de palitos: 2.

1 ª construção → 3 palitos

2ª construção → 5 palitos = 3 + 2

3ª construção → 7 palitos = 5 + 2

4 ª construção→ 9 palitos = 7 + 2

5 ª construção → 11 palitos = 9 + 2

Como uma Progressão Aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão, a sequência da quantidade de palitos 3, 5, 7, 9, 11 é uma Progressão Aritmética e o número fixo 2, é a razão dessa progressão.

3.4.2.2 Estrutura da 2ª Sessão da sequência didática de P.A. e orientações para a aplicação

Objetivos da 2ª sessão:

- Escrever uma sequência numérica e reconhecê-la como uma P.A.
- Escrever a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética.

Atividades da 2ª sessão

Atividade 1

Observe as construções com quadrados.

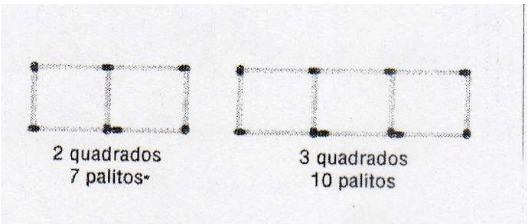


Figura 15 – Construção com quadrados

Fonte: Dante, 2004, p. 110.

1. Supondo que seja mantido o padrão apresentado na figura, complete a sequência numérica referente à quantidade de palitos usada nas cinco primeiras construções com quadrados.
   7, 10, ______, _______, _______
2. A sequência numérica que você escreveu é uma Progressão Aritmética? Por quê?
3. Mantendo o padrão apresentado na figura, determine o número de palitos utilizados na 72ª construção e escreva como chegou ao resultado.

4. Escreva uma expressão matemática que indique o número **P** de palitos em função do número de construções **n** de quadrados.

5. Explique com suas palavras, uma maneira que você pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos, em diferentes construções imaginadas.
6. Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de palitos para qualquer construção imaginada.

Atividade 2

P_2

O dono de uma fábrica pretende iniciar a produção com 2 000 unidades mensais e, a cada mês, produzir 175 unidades a mais. Mantida essas condições, quantas unidades a fábrica produzirá no 10º mês?

Objetivos dos itens da atividade 1, da 2ª sessão

2ª SESSÃO	OBJETIVO DA ATIVIDADE
1. Supondo que seja mantido o padrão apresentado na figura, complete a sequência numérica referente à quantidade de palitos usada nas cinco primeiras construções com quadrados. 7, 10, ______, _______, _______	Escrever uma sequência numérica seguindo um padrão.
2. A sequência numérica que você escreveu é uma Progressão Aritmética? Por quê?	Reconhecer que a sequência apresentada é uma P.A.
3. Mantendo o padrão apresentado na figura, determine o número de palitos utilizados na 72ª construção e escreva como chegou ao resultado.	Elaborar mecanismo de generalização para cálculo de termos de uma P.A.
4. Escreva uma expressão matemática que indique o número **P** de palitos em função do número de construções **n** de quadrados.	Escrever uma expressão matemática que permita calcular um termo qualquer de uma sequência dada.
5. Explique com suas palavras, uma	Explicitar uma maneira de calcular qualquer

maneira que você pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos, em diferentes construções imaginadas.	termo de uma sequência em P.A.
6. Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de palitos para qualquer construção imaginada.	Encontrar uma fórmula que permita determinar qualquer termo de uma sequência em P.A.

Quadro 02: Detalhamento da 2ª Sessão

Objetivo da atividade 2, da 2ª sessão.

O problema P_2 tem o objetivo de oportunizar um momento para que o aluno reflita sobre as estratégias que utilizou antes de conhecer a fórmula do termo geral .

Orientações da pesquisadora sobre os procedimentos a serem adotados pela professora:

A professora deve iniciar a 2ª sessão a partir de uma retrospectiva do que foi realizado na 1ª sessão.

Após o momento inicial, deve explicitar que as atividades da 2ª sessão devem ser realizadas em duplas e as respostas registradas por cada dupla e apresentadas posteriormente para o coletivo da classe.

Após as apresentações dos grupos, a professora deve institucionalizar como se chega à fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética, baseando-se no seguinte texto:

Para o 6º quesito da atividade 1 da 2ª sessão, devemos encontrar uma fórmula que nos permita obter um termo qualquer de uma Progressão Aritmética, conhecidos o primeiro termo e a razão r da progressão.

Assim, nas construções com quadrados, usamos 7 palitos na 1ª construção, 10 palitos na 2ª construção, 13 palitos na 3ª construção, 16 palitos na 4ª construção e 20 palitos na 5ª construção. Observamos com isso que a partir da 2ª construção, a quantidade de palitos é sempre a quantidade da construção anterior adicionada ao número fixo: 3.

Assim, a sequência numérica 7, 10, 13, 16, 20 é uma Progressão Aritmética cuja razão é o número fixo 3.

Daí, temos que

$7 = a_1$

O segundo termo é igual ao primeiro termo adicionado a uma vez a razão r.

$10 = a_2$

$a_2 = a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = a_1 + r$

O terceiro termo é igual ao primeiro termo adicionado a duas vezes a razão r.

$13 = a_3$

$a_3 = a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + r + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

O quarto termo é igual ao primeiro termo adicionado a três vezes a razão r.

$16 = a_4$

$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 2r + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

A partir desses casos particulares, podemos formular a hipótese de que o termo de ordem n é igual ao primeiro termo adicionado a (n – 1) vezes a razão r. Ou seja, a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética de razão r: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n, \ldots})$ *será:*

$$a_n = a_1 + (n - 1).\, r$$

Com a fórmula do termo geral, podemos responder, por exemplo, quantos palitos serão usados na 72ª construção de quadrados.

$a_n = a_1 + (n – 1).\ r$

$a_{72} = 7 + (72\ - 1).\ 3$

$a_{72} = 7 + 71.\ 3$

$a_{72} = 7 + 213$

$a_{72} = 220$

Após a explicação da fórmula do termo geral da P.A., a professora deve retomar o problema P_1 e, a partir das estratégias apresentadas pelos alunos, solucionar o problema, validando ou não algumas das estratégias usadas pelos alunos.

Depois disso, a professora deve entregar, para que os alunos respondam individualmente, o problema $P_{2,}$ e após essa atividade, encerrar a 2ª sessão.

Salientamos que embora não tenhamos o objetivo de analisar se a aplicação da sequência didática de P.A. favoreceu à aprendizagem, o problema P_2 será distribuído com a finalidade de oportunizar aos alunos um momento para que reflitam sobre um problema semelhante a $P_{1.}$ Assim, acreditamos que estaremos contribuindo para que eles se remetam às estratégias que usaram antes do conhecimento institucionalizado pela professora e utilizem a estratégia que seja uma boa resposta ao problema.

3.4.3 Análise das atividades da sequência didática de P.A.[3]

Apresentaremos a análise das questões e indicaremos as estratégias previstas na análise a priori por E, e, quando for prevista mais de uma estratégia, chamaremos de E_1 a estratégia 1, de E_2 a estratégia 2, e assim sucessivamente.

3.4.3.1 Análise das atividades da 1ª sessão

A primeira sessão foi iniciada com o problema denominado de P_1. Vejamos:

---

[3] Nessa análise pretendemos fazer uma adaptação do que seria uma Análise a Priori, no âmbito da Engenharia Didática. Aqui, a nossa intenção é a de antecipar como os alunos podem responder a essa questão, que deve ser o esperado pela professora na aplicação da sequência didática.

P_1

> *Um contribuinte esqueceu-se de pagar certo imposto. Verificou então que haveria multa pelo atraso, que deveria ser paga do seguinte modo: no primeiro dia após o vencimento, a multa seria de R$ 38,00; a cada dia, a partir do segundo dia de atraso, seriam acrescidos R$ 5,00 à multa do dia anterior. Construa uma tabela mostrando o quanto esse contribuinte deve pagar de multa se atrasar 1 dia, 2 dias, 3 dias, 4 dias, 18 dias e n dias.* (PAIVA, 2005, p. 191)

Para uma análise mais apropriada dividimos P_1 em três partes:

1ª Parte - multa do primeiro ao quarto dia

2ª Parte - multa do 18º dia

3ª Parte – n dias

1ª Parte - multa do primeiro ao quarto dia

E_1

O aluno escreve a multa do primeiro dia (R$ 38,00) e soma cinco reais para obter a multa acumulada do segundo dia. Com o resultado obtido, soma cinco reais para obter a multa acumulada do terceiro dia. Ao valor do terceiro dia adiciona cinco reais para encontrar a multa acumulada do quarto dia.

1º dia - 38

2º dia - 38 + 5 = 43

3º dia - 43 + 5 = 48

4º dia - 48 + 5 = 53

E_2

O aluno escreve a multa do primeiro dia (R$ 38,00) e soma cinco reais para obter a multa do segundo dia. A multa do terceiro dia é obtida somando a R$ 38,00 o resultado da multiplicação de cinco reais por dois. Para o quarto dia, obtém-se o valor a ser pago somando R$ 38,00 ao resultado da multiplicação de cinco reais por três.

1º dia – 38

2º dia – 38 + 5 = 43

3º dia – 38 + 2.5 = 38 + 10 = 48

4º dia – 38 + 3.5 = 38 + 15 = 43

2ª Parte - multa do 18º dia

E_1

Para o cálculo da multa do décimo oitavo dia, o aluno escreve a multa do primeiro dia e soma com o resultado da multiplicação de dezessete por cinco.

18º dia – 38 + 17. 5 = 38 + 85 = 123

E_2

Escreve 38 para o primeiro dia e vai somando 5 até chegar ao décimo oitavo dia.

38, 43, 48, 53, ... , 123.

E_3

Calcula a multa do décimo oitavo dia multiplicando dezoito por cinco e somando o resultado a trinta e três, visto que para o primeiro dia temos uma multa de 38 = 33 + 5. Assim temos: 18.5 + 33 = 90 + 33 = 123

3ª Parte – multa para n dias

E_1

Para n dias o contribuinte pagará uma multa de 38 + (n – 1).5

E_2

Para n dias o contribuinte pagará uma multa de 33 + 5n, pois o primeiro dia é 33 + 5.

Posteriormente ao problema P_1 teremos a seguinte atividade:

Atividade 2, da 1ª sessão

As respostas dos quesitos abaixo devem ser anotadas na cartolina.

*Observe as construções.

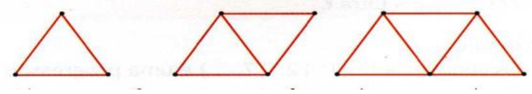


Figura 14 - Construção com triângulos

Fonte: Dante, 2008, p. 136.

1. Mantendo o padrão representado na figura, utilize palitos de fósforo e represente como ficará a 4ª e a 5ª construção.

E

Para representar a quarta construção o aluno acrescentará os palitos conforme a construção anterior. Então a quarta construção ficará com 9 palitos (7 palitos da terceira construção mais dois) e a quinta construção ficará com 11 palitos.

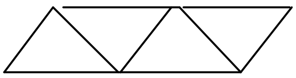


Figura 16 – Representação da quarta construção

2. Represente por meio de um desenho como ficaria a 8ª construção.

E

Para representar a oitava construção o aluno usará 17 palitos. Pode chegar a essa conclusão acrescentando sempre dois palitos à construção anterior até chegar a oitava construção.

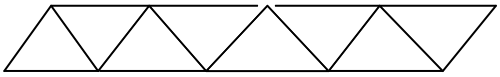


Figura 17 – Representação da oitava construção

3. Preencha a tabela abaixo de acordo com o que realizou no item 1.

Construção	1	2	3	4	5
Quantidade de palitos					

E

Para preencher a tabela, o aluno escreve a quantidade de palitos da primeira construção (3) e soma dois para obter o resultado da segunda construção. Para a terceira, quarta e quinta construção, sempre somará dois à quantidade de palitos da construção anterior.

4. Explique como é formada a sequência de números referente à quantidade de palitos.

E

Escreve-se o primeiro termo e os demais termos serão obtidos somando-se dois ao termo anterior.

5. Mantendo o padrão representado na figura, quantos palitos serão usados na 15ª construção? Explique como você encontrou o resultado.

E_1

Os termos são obtidos somando 2 ao termo anterior. Assim a 15ª figura será 29 + 2.

1ª figura – 3 palitos

2ª figura – 5 palitos

3ª figura – 7 palitos

4ª figura – 9 palitos

5ª figura – 11 palitos

Então 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31. Assim, a 15ª figura terá 31 palitos.

E_2

Multiplicando 2 por 14 e somando com 3.

1ª construção – 3 palitos

15ª construção – 14. 2 + 3 = 28 + 3 = 31 palitos.

Segue a análise das atividades da 2ª sessão.

3.4.3.2 Análise das atividades da 2ª sessão

Atividade 1, da 2ª sessão

Observe as construções com quadrados:

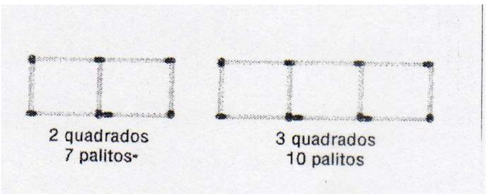


Figura 15 – Construção com quadrados

Fonte: Dante, 2004, p. 110.

1. Supondo que seja mantido o padrão apresentado na figura, complete a sequência numérica referente à quantidade de palitos usada nas cinco primeiras construções com quadrados.

7, 10, ______, _______, _______

Antes de apresentarmos as estratégias que previmos para a atividade 1, destacamos que a figura 15 foi modificada e a primeira construção com quadrados não aparece. Deveríamos ter deixado do modo original ou acrescentado a construção de quatro quadrados, visto que com apenas duas construções não se pode perceber qual o padrão adotado na figura, podendo assim trazer dúvidas a quem for resolver.

Salientamos ainda, que apresentaremos as estratégias pensando no padrão de regularidade de uma P.A.

E

O aluno observa que cada termo é obtido somando-se 3 ao termo anterior e assim, escreve 7, 10, 13, 16, 19.

2. A sequência numérica que você escreveu é uma Progressão Aritmética? Por quê?

____

____

E

O aluno responde: Sim, é uma P.A., pois cada termo, a partir do segundo termo, é obtido somando sempre um número fixo (razão da P.A.) ao termo anterior.

3. Mantendo o padrão apresentado na figura, determine o número de palitos utilizados na 72ª construção e escreva como chegou ao resultado.

E_1

Os termos são obtidos somando 3 ao termo anterior. Assim, o aluno escreve todos os termos até a 72ª construção.

7, 10, 13, 16, 19, 22, ..., 217, 220.

E_2

O aluno escreve o primeiro termo, e soma ao produto de 71. 3

72ª construção – 7 + 71.3 = 7 + 213 = 220

E_3

Calcula a quantidade de palitos da 72ª construção multiplicando setenta e dois por três e somando o resultado a quatro, visto que para primeira construção temos 7 palitos que é 4 + 3. Assim temos: 72.3 + 4 = 216 + 4 = 220.

4. Escreva uma expressão matemática que indique o número **P** de palitos em função do número **n** de construções com quadrados.

____

E_1

$P = 7 + (n-1).3$

E_2

$P = 3n + 4$

E_3

$f(n) = 3n + 1$

$1 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 7$

$3 \rightarrow 10$

$4 \rightarrow 13$

$\vdots \quad \vdots$

$n \rightarrow f(n)$

5. Explique com suas palavras, uma maneira que você pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos, em diferentes construções imaginadas.

____

____

____

E

Para calcular a quantidade de palitos para qualquer construção imaginada, basta somar a quantidade de palitos da 1ª construção com a multiplicação da quantidade de construções menos um pela razão da P.A.

6. Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de palitos para qualquer construção imaginada.

E

Sendo a_n a construção imaginada, r a razão da P.A., a_1 a primeira construção e n o número de construções, temos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1). r$$

Após a atividade 1 da 2ª sessão, foi entregue o problema denominado de P_2.

P_2

O dono de uma fábrica pretende iniciar a produção com 2 000 unidades mensais e, a cada mês, produzir 175 unidades a mais. Mantida essas condições, quantas unidades a fábrica produzirá no 10º mês?

E_1

Para o cálculo da produção do décimo mês, o aluno escreve a produção do primeiro mês e soma com o resultado da multiplicação de nove vezes cento e setenta e cinco.

10º mês – 2 000 + 9. 175 = 2 000 + 1575 = 3 575

E_2

Escreve 2 000 para o primeiro mês e vai somando 175 até chegar ao décimo mês.

2 000, 2 175, 2 350, 2 525, ... , 3 575.

3.4.4 Entrevista com a professora e apresentação da proposta da sequência didática pela pesquisadora

Essa etapa foi dividida em dois momentos, que denominamos de A e B.

Momento A:

Realizamos uma entrevista aberta com a professora na qual foram feitas duas perguntas abertas:

Para você o que é Progressão Aritmética?

Como geralmente ensina Progressão Aritmética aos seus alunos?

Nosso objetivo com essa entrevista foi o de percebermos elementos sobre a relação da professora com o saber em questão e possíveis indícios de como ela gerencia as situações didáticas quando esse saber está em cena.

Em relação à primeira pergunta, acreditamos que os dados nos deram alguns indícios da relação da professora com o saber e que só na prática em sala de aula foram confirmadas. Vejamos o que a professora respondeu:

P – Bem, a minha definição de P.A. é mais ou menos a definição que está no livro. De que P.A. é uma sequência em que a diferença entre um termo e o anterior a esse termo é sempre constante. Então basicamente é isso de P.A.

Quadro 03 - Recorte de Protocolo da entrevista com a professora

Percebemos que a resposta da professora é baseada no texto do livro didático. Com relação à segunda pergunta, nosso objetivo foi o de sabermos se a professora costuma abordar P.A. de maneira diferenciada ou não da que lhe propomos com a sequência didática e não para estabelecermos nenhuma comparação. Como a professora respondeu que nunca havia ensinado P.A., ela expôs o que achava ser a abordagem ideal. Vejamos:

P – Agora assim, é eu tenho dificuldade até de responder essa pergunta, porque eu não trabalhei, eu só peguei uma vez uma turma de 2º ano e estou pegando o 2º ano essa vez agora, e não trabalhei, não deu tempo. Eu já peguei a turma já atrasada e não deu tempo de eu trabalhar P.A. Mas assim, eu tenho a idéia de como seria trabalhar P.A. A forma ideal de se trabalhar uma P.A., no caso Progressão Aritméitca. Primeiro, eu acho que o ideal seria através de uma sequência didática, mostrando pra eles os vários tipos de sequências e se possível também, até mostrando a relação com outras disciplinas, e a sequência não só existe em Matemática. Existe em dados estatísticos de Geografia e de outras disciplinas que a gente pode trabalhar essa sequência. Mostrando sempre exemplos práticos, mostrando também o porquê daquela fórmula do termo geral, pra que ele crie algo mais concreto que saia mais do abstrato da matemática. Porque a gente, é... a forma como eu vi P.A. não foi assim. Eu vi P.A. muito como aquela fórmula do termo geral, do a_n , a_1, a soma dos termos. Eu acho que esse não é a forma ideal. Então, eu gostaria de dar uma aula ideal através da sequência didática.

Quadro 04 - Recorte de Protocolo da entrevista com a professora

Observamos que embora a professora nunca tenha trabalhado a Progressão Aritmética, explicitou sua intenção e disponibilidade para aplicar a sequência didática de P.A. proposta pela pesquisadora.

Momento B:

Nesse momento, propomos à professora a realização da sequência didática elaborada pela pesquisadora. Aceita a proposta, a professora recebeu as orientações, regras e atividades da sequência e dialogou com a pesquisadora, sobre a aplicação da mesma. O material que foi entregue à professora com os objetivos, procedimentos e atividades da sequência didática está em anexo.

3.4.5 Aplicação da sequência didática de P.A.

Realizamos essa etapa registrando em vídeo (videografia) e fazendo um diário de campo de todas as aulas em que a sequência didática de P.A. esteve sendo aplicada na sala de aula pela professora.

Pretendíamos, de acordo com a aplicação da sequência, direcionar a filmagem para o professor, a fim de captar elementos sobre como a conduz, ou seja, como gerencia em sala de aula as regras preestabelecidas pela pesquisadora para a aplicação da sequência didática de P.A. Direcionamos também a filmagem para os alunos, nas atividades individuais e coletivas, com o intuito de registrar suas ações, bem como as interações entre os alunos e entre aluno(s)-professor, na realização da sequência. Isto foi feito, tendo o cuidado para que tal direcionamento acontecesse discretamente e assim não interferisse na naturalidade das ações dos sujeitos envolvidos.

O diário de campo foi construído a cada aula. Nele constaram as anotações que a pesquisadora julgou pertinentes e relevantes para o esclarecimento do objeto de estudo desta pesquisa.

Destacamos que antes de videografarmos as aulas da aplicação da sequência didática de P.A. estivemos na sala de aula, local de nossa pesquisa, e filmamos duas aulas de Matemática, de cinquenta minutos cada uma com a finalidade de que o primeiro contato com a turma não fosse a primeira aula de aplicação da sequência de P.A. para que a “novidade” da câmera não estivesse ainda tão presente na dinâmica da aula.

3.5 Análise dos dados

A análise dos dados foi realizada da seguinte maneira:

1. Transcrevemos todas as aulas videografadas em que a sequência didática de P.A. foi aplicada.
2. Com os dados construídos a partir das transcrições e das anotações que fizemos durante as aulas, no diário de campo, buscamos investigar em que medida, a professora negociou na sala de aula do 2º ano do Ensino Médio, as regras estabelecidas pela pesquisadora para aplicação da sequência didática elaborada por ela, para o ensino do conteúdo de Progressão Aritmética. Para isso direcionamos nossa análise para as seguintes categorias por nós elencadas:

    - Negociações, rupturas e renegociações do contrato didático;
    - Gestão do tempo;

De posse das análises da videografia, das análises registradas no diário de campo, da entrevista feita inicialmente com a professora e dos protocolos das atividades dos alunos, estabelecemos uma articulação entre os dados, ou seja, fizemos uma análise global a fim de compreendermos melhor o nosso objeto de estudo e assim, atingirmos o que inicialmente explicitamos como objetivo principal: investigar como a professora negocia o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada, para o ensino de Progressão Aritmética.

Passaremos então no capítulo posterior à apresentação da análise dos resultados do nosso estudo.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Tendo realizado nosso estudo, apontaremos alguns aspectos relevantes, os quais discutiremos nesse capítulo. Ressaltamos, no entanto, que ao analisarmos os dados construídos, estaremos focando o nosso objetivo, citado anteriormente, que é o de investigar como a professora negocia o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada, para o ensino de Progressão Aritmética.

Para isso, faremos a análise dos dados em duas etapas: análise da 1ª e 2ª sessão da aplicação da sequência didática e análise comparativa entre as estratégias previstas em nossa "análise a priori" e as estratégias utilizadas pelos alunos.

4.1 Análise da 1ª e 2ª sessão da aplicação da sequência didática de P.A.

4.1.1 Análise da 1ª sessão da aplicação da sequência didática de P.A.

A primeira sessão da aplicação da sequência didática de P.A. foi proposta pela pesquisadora para ser aplicada em duas aulas de 50 minutos. No entanto, o modo como a professora direcionou e geriu o tempo fez com que aplicasse em três aulas de 50 minutos. Acreditamos que o fato da primeira aula ter iniciado com vinte minutos de atraso interferiu nesse aspecto.

<u>Primeira e segunda aula da 1ª sessão</u> (duas aulas de 50 minutos cada uma)

A professora inicia a aula explicitando que o trabalho a ser realizado naquele dia obedecerá a uma dinâmica que difere da usual da sala. Observemos o recorte de protocolo do quadro nº 05.

P – Olha gente, a nossa aula hoje vai ser uma aula diferente. E essa aula diferente, porque que vai ser uma aula diferente? Geralmente ... Uma aula que vai fugir um pouco da nossa rotina de aula. Por quê? Qual é a nossa rotina de aula? A gente começa nossa aula, acompanhando com o livro, e o primeiro passo do livro é o quê? Dá o tema, o assunto, não é? Ele dá o conteúdo, ele diz pra você o que é que a gente vai estudar. Mas hoje a gente vai fazer diferente. Vamos trabalhar algumas situações, eu não vou falar pra vocês qual é o assunto, qual é o conteúdo. A gente primeiro vai trabalhar pra depois chegar nesse conteúdo. (repete) A gente vai trabalhar sem intitular nada. Então o primeiro passo eu vou distribuir pra vocês, é... um enunciado de um exercício que vocês vão tentar responder, tá? Vão tentar responder da forma de vocês. Pelo conhecimento que vocês têm. Eu não vou direcionar vocês a responder isso aqui não. Você vai responder e depois que você responder da sua forma, você vai registrar, escrever as estratégias que você utilizou pra responder. Ah, primeiro passo eu fiz isso, somei isso fiz aquilo. Você vai dizer, escrever apenas o que você fez. É simples, você não vai utilizar a fórmula pra poder responder isso aqui, você apenas vai fazer pelo que você sabe, é pelo que conhece. Vou distribuir pra cada um.

Quadro 05 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Com o recorte de protocolo do quadro 05, é possível percebermos que a professora expõe para os alunos as novas regras do jogo didático. Regras essas que representam rupturas com o contrato que geralmente vigora nas demais aulas de matemática dessa turma. A exemplo disso temos o fato de não explicitar o conteúdo a ser estudado, do professor deixar o aluno ser mais autônomo sem direcioná-lo totalmente, dar espaço para que o aluno estabeleça estratégias de resolução que não se atenham a fórmulas para resolver um problema e iniciar a aula por meio de uma problematização que deverá ser pensada.

Eis, o problema denominado $P_{1:}$

Um contribuinte esqueceu-se de pagar certo imposto. Verificou então que haveria multa pelo atraso, que deveria ser paga do seguinte modo: no primeiro dia após o vencimento, a multa seria de R$ 38,00; a cada dia, a partir do segundo dia de atraso, seriam acrescidos R$ 5,00 à multa do dia anterior. Construa uma tabela mostrando o quanto esse contribuinte deve pagar de multa se atrasar 1 dia, 2 dias, 3 dias, 4 dias, 18 dias e n dias. (PAIVA, 2005, p. 191).

Depois de expor que cada aluno deveria resolver o problema P_1 individualmente, utilizando o próprio conhecimento e distribuir a folha com a atividade, a professora interrompe a turma e diz:

P – Eu vou ler com vocês, tá, esse exercício. Posso ler?

Quadro 06 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Nesse recorte de protocolo do quadro 06, uma ruptura do contrato estabelecido entre a pesquisadora e a professora, começa a acontecer. Isto porque, embora tenha sido orientada pela pesquisadora sobre ler P_1 junto com os alunos e deixá-los resolverem o problema sem o seu auxílio, a professora não consegue se desprender da prática que costumeiramente desenvolve na sala de aula e que relatou no recorte do quadro 05 e começa a indicar caminhos para que eles consigam a solução do problema. Essa ruptura é confirmada no recorte de protocolo do quadro 07. Vejamos:

P- Querem que eu repita de novo? Não? Mas tem uma pessoa ali que não entendeu. Então vou repetir pra ela e pra algumas pessoas. O contribuinte esqueceu de pagar ..., certo. Por causa disso, ele vai pagar multa. No primeiro dia após o vencimento ele vai pagar R$ 38,00. A multa vai ser isso. A cada dia a partir do 2º dia de atraso seria acrescido 5 reais.
Aluno - Em cima desses trinta e oito?
P – Em cima desses trinta e oito. Então no primeiro dia R$ 38,00, no segundo dia vai ser acrescido mais R$ 5,00., no terceiro dia, quarto dia, quinto dia...
Alunos continuam a responder.
Professora interrompe e explica:
P – Aí depois que você construir a multa de R$ 38,00 no primeiro dia, você vai pegar aquela multa de trinta e oito e vai somando, e vai acrescer de cinco. E no nono dia, também. É a multa do anterior mais cinco.

Quadro 07 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Com o recorte do quadro 07 uma regra é renegociada implicitamente: a professora ajudará quando achar conveniente, mesmo tendo orientado os alunos a responderem sozinhos.

Após esse momento, vários alunos vão até a professora perguntar se as estratégias que estão utilizando são corretas, como é mostrado no recorte de protocolo do quadro 08.

Os alunos continuam individualmente. Um aluno (Pedro) levanta e vai até a professora, e vira as costas pra câmera, falando baixinho.
Ele volta ao lugar e a professora diz:
P – Mas aí você vai ver. Pra chegar...
Outra aluna chama.
P- Primeiro dia, somando, a cada dia..., vai lendo.
Professora fica próxima a determinada aluna. Essa aluna posteriormente chama a professora e fala alguma coisa...
P – Você registra o que conseguiu, se você não conseguiu, porque não conseguiu.
Outro aluno chama. Professora faz gestos e confirma o que ele pergunta.
Um outro aluno levanta e vai até a professora. Se coloca em posição que não dá pra entender o que pergunta.
..
O aluno (Pedro) vai até a professora, mostra-lhe o que fez e ela diz:
P – Qual foi o raciocínio que você usou?

Quadro 08 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Percebemos que a situação exposta no recorte do quadro 08 indica também uma das tentativas da professora em se adequar às regras que foram negociadas no início da aula com os alunos e pré-determinadas com a pesquisadora, pois ora responde aos alunos falando baixinho, ora lança um questionamento de maneira audível. Quando faz isso, torna claro que o importante é se o raciocínio que o aluno usou é ou não coerente, e provoca o que Brousseau afirma ser a “devolução didática”, na qual o professor, afim de que o aluno aprenda de fato, se destitui de seu papel de ensinante.

Ainda, com essa situação demonstrada no recorte do quadro 08, salientamos que há, por parte da professora, expectativas diferentes em relação à aprendizagem de alguns alunos, o que pode indicar um contrato diferencial. Destacamos também a exemplo dessas expectativas, o seguinte recorte de protocolo:

Outra aluna chama a professora, fala baixinho e a professora diz:
P – Aí não sei. N dias não sai?
Olha para Pedro e diz:
P - N dias sai? . Pergunta a Pedro:
P – O seu n dias sai?
Ele não responde e alguns riem

Quadro 09 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Percebemos no recorte do quadro 09, um momento no qual a professora demonstra que possui expectativas positivas em relação à aprendizagem de "Pedro", pois depois de não responder sobre n dias a uma aluna que lhe perguntou, direciona o questionamento ao referido aluno.

Os alunos resistem à regra sobre terem de resolver individualmente o problema. Isto porque embora tenham acatado as regras do jogo quando expostas no início da aula pela professora, algumas vezes tentaram perguntar aos colegas ou insistiram em perguntar à professora. Como já foi dito anteriormente, a professora ora seguia o proposto pela pesquisadora e pelo que em sua entrevista disse ser a forma ideal para se ensinar a Progressão Aritmética, ora voltava ao que realiza em sua prática.

Pedro conversa com a professora. E ela lança a pergunta para a turma:
P - Esse n dias será que é um valor que não tem multa? O que é que vocês acham?
A – Vai ter multa não é professora?
P – Vai ter multa, mas depende da quantidade de dias.
Pedro pergunta e a professora diz:
P – Sinceramente eu não sei, a gente vai descobrir.
A - Ei professora, é por que não tem fim?
P – Por que não tem fim? Será ? Não sei. Façam o que vocês acham. Depois a gente vai ver.
A – Bota n e aí embaixo bota três pontinhos assim.

Quadro 10 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Na relação didática inicial com o saber, Progressão Aritmética, os alunos questionaram o "n" dias, pois não conseguiam entender o que significava, e mesmo a professora tendo dito que não se preocupassem com essa parte do problema, os alunos demonstraram inquietação em compreender, como podemos ver no recorte de protocolo do quadro 10.

Esse aspecto da relação inicial com o saber revelou o que Brito Menezes (2006) reflete em relação ao que acontece quando um novo saber entra em cena na sala de aula: uma tensão mais evidente entre os pólos do triângulo didático e uma maior assimetria, visto que o aluno está mais distante do saber.

Em relação a essa tensão inicial, houve um momento em que a professora perguntou a pesquisadora se poderia ajudar os alunos quando perguntavam sobre o n dias. A pesquisadora respondeu que seria melhor que não, visto que o objetivo era o de instigá-los para a atividade subsequente. Nessa atitude da professora, revela-se um conflito: agir conforme o negociado com a pesquisadora, ou conforme o habitual.

Ainda, na discussão sobre o n dias do problema P_1, destacamos o que um aluno falou: *"n dias vou colocar x*". Essa fala demonstra uma das regras que geralmente presenciamos em aulas de Matemática: um valor desconhecido é sempre denominado de x. A postura do aluno ao adotar o x no lugar de n indica então, marcas de contratos anteriores.

Após essa tensão inicial, outro aspecto da gestão dos fenômenos didáticos aparece, quando a professora demonstra certa preocupação com o tempo didático. O recorte de protocolo do quadro 11 explicita essa situação:

P- Terminaram?
Pedro – Terminei.
Outro aluno faz algumas perguntas e a professora :
P – É... É...
...
P – Não, não entrega não. Todo mundo já terminou, não é? Agora eu queria que alguns de vocês relatassem o que foi que você, qual foi a estratégia que você utilizou pra resolver isso aí. Quem poderia ler pra mim?

Quadro 11 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Percebemos que ao perguntar se todos terminaram a professora não espera a resposta. Ela apressa o momento para ouvir os relatos sobre as estratégias usadas na atividade sem confirmar se todos terminaram. Com essa atitude podemos perceber o conflito que geralmente o professor tem que gerir: o tempo didático e o tempo de aprendizagem de cada aluno.

O que nos chamou atenção nesse momento da aula foi o fato de que, ao final de cada relato sobre a estratégia usada, os alunos confrontavam o que o outro falava com o seu raciocínio, oportunizando situações de aprendizagem bastante relevantes. O recorte de protocolo do quadro 10 expõe uma dessas situações. Vejamos:

P - Alguém mais gostaria de me dizer como foi que fez? Ele (aponta para Pedro) utilizou a estratégia do tipo, pra achar o décimo oitavo dia de multiplicar por cinco. Alguém fez diferente?
A – Eu multipliquei por cinco também. O teu deu noventa reais, o décimo oitavo? O meu deu cento e trinta e oito.
A – Mas porque tu tinhas somado. Deu noventa quando multiplicou.

Quadro 12 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Ainda em relação ao momento dos relatos das estratégias, a professora adotou a postura de ouvir e ao final incentivar que outros relatos diferentes fossem expostos. Nessa fase da aula ela aponta para determinada aluna que, embora tenha usado uma estratégia semelhante aos demais colegas que já haviam apresentado, tinha um diferencial que solucionava o problema, no que concerne ao cálculo da multa para 18 dias. Observemos essa situação no recorte de protocolo do quadro 13.

P – Sim, mas eu acredito que deve ter alguém que deve ter feito diferente. Uma pessoa só me diga como foi que você fez sem, ter que multiplicar. Você (aponta para Alice) Como foi que tu fizesse, Alice?
Alice – Eu multipliquei, mas eu multipliquei por catorze.
P – Como foi que você fez? Qual foi a estratégia?
Alice – Do primeiro até ao quarto dia, aumentei sempre cinco reais.
P- E no primeiro dia o que foi que você colocou?
Alice – Trinta e oito.
P – Trinta e oito.
Alice – Aí no segundo dia, é mais cinco, deu quarenta e três, aí no terceiro mais cinco, quarenta e oito; aí depois mais cinco, no quarto dia deu cinqüenta e três. Aí dezoito dias não é, a gente não multiplica por dezoito. A gente multiplica por catorze, pois já tem até o quatro. Aí dá cento e vinte e três.
P – Ela não multiplicou dezoito dias por cinco, porque ela já tinha feito quatro dias.
Alguns alunos falam que está certo.

Quadro 13 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Embora a professora não tenha falado em certo ou errado, pois uma das regras negociadas com a pesquisadora era a de que a professora deixaria o momento de institucionalizar o saber P.A., no final da 2ª sessão, onde então retomaria o problema P1, o raciocínio que a aluna utilizou foi valorizado. Isto aconteceu quando enfatizou *"ela não multiplicou dezoito dias por cinco, porque ela já tinha feito quatro dias"*, evidenciando uma regra implícita de contrato didático: a ênfase dada pela professora é um aspecto que valida a estratégia como a correta. Vale ressaltar também, que o fato da professora indicar a referida aluna para o relato demonstra o papel do professor em direcionar as ações do jogo didático, visto que anteriormente já tinha tido acesso à estratégia dessa aluna e, portanto sabia que seria relevante seu relato para o momento.

Posteriormente às apresentações das estratégias referentes à P_1, a professora pede que os alunos se organizem em grupo para a segunda atividade da primeira sessão da sequência didática de P.A. Começa então a distribuir o material que será usado, e fala:

P – Ora, eu vou distribuir pra vocês... Vocês não vão fazer nada agora... Eu vou dar três para cada grupo (refere-se à atividade em papel A4). Vocês não vão fazer nada nessa folha.

Quadro 14 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

O recorte de protocolo do quadro 14 evidencia que o professor ao desempenhar seu papel como um dos atores didáticos organiza "a cena" para tudo acontecer. Esse fato gera nos alunos a expectativa de que o professor expresse as regras para cada etapa de atividades, e tal fato constitui uma das regras implícitas do contrato didático.

Esse "não dito" do contrato didático é tão presente nas aulas que, mesmo a atividade contendo as instruções do que deve ser feito e sendo possível o aluno realizá-la sem a ajuda da professora, ela insiste em alongar o tempo sobre como deve ser feita a atividade.

No recorte de protocolo do quadro 15 podemos perceber essa situação, pois quando os alunos ainda estão lendo as instruções e a atividade a ser desenvolvida, a professora interrompe e fala:

P - Olha, vocês vão resolver essas questões na folha de cartolina.
A – Ah...
P – Eu vou distribuir, vai ser uma folha por grupo. Presta atenção. Vou distribuir a folha de cartolina, depois a caixa de fósforos pra vocês montarem isso aí na cartolina e depois, tudo que vocês responderem desse exercício vai ser registrado na cartolina. E depois vocês vão apresentar o que vocês construíram. Tá?
A – Difícil...
P - Não é difícil. Não fiquem assustados. É simples.

Quadro 15 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

É possível perceber no recorte de protocolo do quadro 15 que quando as regras são expressas e um dos alunos diz "difícil", logo, a professora dissipa o comentário e afirma que "é simples", ou seja, renegocia usando a palavra oposta, isto para que nenhum dos alunos resolva não participar da atividade e instalar uma ruptura de contrato.

Ao começarem a resolver a atividade proposta um dos alunos chama a professora, que diz:

P – Olha, eu vou adiantar pra vocês o seguinte: eu não vou poder ajudar a vocês nessa atividade. Nem responder, nem dar ajuda na resposta.
Pedro – Eu sei, mas...

Quadro 16 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Com o recorte de protocolo do quadro 16, percebemos que mesmo a professora tendo dito durante a resolução de P_1 que os alunos deveriam resolver sem seu auxílio, foi necessário que essa regra fosse reafirmada para a segunda atividade da 1ª sessão. Isso ocorreu devido a "resistência" explícita dos alunos e a dificuldade da professora em incorporar essa regra negociada com a pesquisadora.

Essa resistência tornou-se mais evidente, pois tão logo a professora concluiu o explicitado no quadro 16, uma aluna perguntou " *Professora, como é esse primeiro?".* Daí ent*ão*, passou a responder a todos os questionamentos feitos pelos alunos renegociando implicitamente que a regra não deveria mais ser seguida.

Posteriormente a essa ruptura de contrato, uma situação que aconteceu em um dos grupos nos chamou a atenção: os componentes discordaram sobre como deveria ser feita a quarta e quinta construção de triângulos.

Alguns aspectos foram considerados como relevantes nessa situação: esse grupo era composto por quatro alunas e dois alunos, sendo que um dos alunos, que denominamos de "Pedro" havia se destacado bastante na primeira atividade da 1ª sessão e era um dos alunos que a professora demonstrava ter expectativas positivas em relação a sua aprendizagem, como já relatamos em momentos anteriores.

Percebemos na discussão do grupo que embora as quatro alunas estivessem pensando corretamente, pois a questão pedia que as construções deveriam ser feitas mantendo o padrão das figuras apresentadas, o aluno "Pedro", depois de muito argumentar (mesmo que seus argumentos fossem inexpressivos e não convencessem às alunas), conseguiu que a sua resposta fosse feita a do grupo. Essa decisão pode ter sido influenciada pela valorização que a professora deu a Pedro na atividade 1, colocando-o como aluno que se destaca por apresentar solução aos problemas. Observemos um trecho dessa situação no recorte de protocolo do quadro 17.

Pedro – Pra mim, vai montar assim. Pela lógica é pra colocar aí em cima.

A aluna Gilda mostra as demais colegas e diz:

Gilda – Tem que ser na ordem.

As duas outras alunas concordam com Gilda.

Pedro – Como é que vai colocar esse aí sem fazer a quarta? Vai ser um pra cima outro pra baixo?

Pedro – Essa é a segunda, essa é a terceira. Ele tá pedindo a quarta. Como ficaria? A gente só vai acrescentar mais um em cima. Entendeu?

Gilda – Não. Eu acho que... Eu entendi, mas não aceito.

Quadro 17 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Esse recorte de protocolo expõe que nessa relação entre aluno-aluno-saber, a validação da estratégia aconteceu baseada em fatores como persistência e liderança. Ou seja, validou-se o argumento de Pedro como sendo o do grupo por ele não aceitar o raciocínio das colegas, talvez motivado por expectativas negativas em relação às alunas, ou por excesso de confiança em seu raciocínio.

Ressaltamos também que o fato de um aluno do grupo concordar com o argumento de Pedro pode revelar o que muitas vezes acontece entre professor-aluno-saber: sabe-se, sem precisar ser dito que o professor possui uma relação ao saber mais apropriada do que a relação do aluno. Assim, o aluno que não percebeu que Pedro não estava com a estratégia correta, pode ter sido motivado por uma expectativa positiva quanto a relação de Pedro com o saber, expectativa essa também sentida pela professora, o que conferiu implicitamente a Pedro, certa “autoridade” no grupo.

Após essa situação, os alunos continuaram respondendo a atividade quando houve um toque para anunciar que a aula tinha acabado. A professora orientou que recolhessem as atividades e falou que na aula da quarta-feira seguinte estariam retomando para terminarem as questões propostas.

<u>Terceira aula da 1ª sessão da sequência didática de P.A.</u> (uma aula de cinquenta minutos)

A terceira aula da 1ª sessão da sequência didática de P.A. foi iniciada com a professora pedindo aos alunos para refazerem os grupos da aula anterior e orientando, aos que faltaram as duas primeiras aulas, se integrarem a um dos grupos já formados.

Dos três grupos formados na aula anterior, um já havia concluído a atividade.

Os demais usaram o tempo dado pela professora para terminarem o que faltava. Ao término da atividade, a professora chama os grupos à apresentação.

A professora negocia as regras que regerão essa nova fase da atividade didática, conforme o recorte de protocolo do quadro nº 18.

P – Eu queria que o restante da turma prestasse atenção nessa apresentação, tá? Todo mundo presta atenção. Por quê? O exercício foi o mesmo, mas podem surgir respostas diferentes, né? Então vamos ver como foi que o primeiro grupo pensou.

Quadro 18 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Observamos que nesse momento, o jogo didático era direcionado por regras distintas das que organizaram a fase do trabalho em grupo. Isto porque enquanto antes todos podiam falar em seus respectivos grupos, agora se fazia necessário que enquanto um dos grupos estivesse apresentando as estratégias de resolução usadas na atividade proposta, os demais deveriam ficar atentos.

Percebemos que durante a apresentação do primeiro grupo, a professora tenta direcionar o momento. Vejamos o recorte de protocolo do quadro 19:

A – Bom, não precisa nem explicar isso daqui, né? Porque é continuando aqui é a terceira, quarta. Aqui é o oitavo e aqui quando a gente... A primeira a gente usa três.
P – Mas que raciocínio você utilizou da primeira pra segunda, da quarta pra quinta?.

Quadro 19 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Vemos que quando o primeiro grupo começa a apresentação falando que a primeira atividade não necessita ser explicada, a professora intervém, pois julga importante que o raciocínio seja exposto aos demais grupos. Acreditamos que isso aconteceu porque ela já tinha visto o que cada grupo produziu e tinha consciência de que o que era tão óbvio ao grupo 1 podia não se estender aos demais. Percebemos que suas intervenções podiam estar refletindo que mesmo sendo a apresentação o momento do grupo expor seu raciocínio, se isso não acontecia de maneira que os alunos ouvintes pudessem compreender, ela, como a pessoa que organiza e gerencia a cena didática, deveria oportunizar, por meio de indagações, a compreensão sobre o que era apresentado.

Também acreditamos que a intervenção da professora durante o momento em que o grupo 1 se apresentava aconteceu ainda por ela possuir expectativas positivas em relação ao conhecimento da aluna que representou o referido grupo, já que nas apresentações do segundo e do terceiro grupo as intervenções não ocorreram, como podemos observar no recorte de protocolo do quadro 20.

Grupo 2

A – A gente primeiro fez isso, tem um triângulo logo e aí a gente foi continuando seguindo a ordem. Acrescentando dois palitos. O segundo, é... o desenho como ficaria a figura, a figura oito. O terceiro, a gente colocou o número de palitos referente a cada figura. No quarto, a explicação, que a cada figura aumenta apenas dois palitos. E o quinto, a gente explicou pra ficar mais fácil, parecida com a explicação dela (aponta para a aluna do grupo 1), pra não ter que contar de figura a figura. A gente pega, é... a figura quinze (aponta) multiplica por dois e acrescenta por um. E também poderia, multiplica catorze por dois, começando da segunda figura e acrescentando os três primeiros palitos da figura um.
P – Muito bem... O último grupo, por favor.

Quadro 20 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Observando o recorte de protocolo do quadro 20 também verificamos que havia certa pressa em que as apresentações fossem concluídas. Daí, percebemos a influência do tempo sobre as ações didáticas da professora: ela sabia que deveria passar a institucionalização do saber ainda naquela aula e desejava cumprir o que havia sido proposto pela pesquisadora no contrato experimental.

Após as apresentações dos grupos, a professora inicia sua fala conforme o que veremos no recorte de protocolo do quadro 21.

P – Gente, oh. Presta atenção. Eu gostei das três apresentações, tá? Vocês se esforçaram, vocês pensaram, vocês é... raciocinaram. Então, concluindo, eu não vou dar respostas completa do problema, mas é... uma introdução, né, de tudo o que vocês fizeram. O que é que vocês utilizaram na primeira construção? (começa a escrever no quadro). Primeira construção, vocês utilizaram quantos palitos?
A – Três.

Quadro 21 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Podemos observar que o trabalho realizado pelos alunos ao estabelecerem hipóteses sobre as possíveis respostas ao que foi solicitado é valorizado pela professora. Além disso, contrariando às expectativas da turma, afirrma que não apresentará respostas, mas apenas fará uma pequena introdução.

Com isso, refletimos que o fato da professora ter explicitado que não daria respostas indica a existência de uma regra implícita de contrato didático: o aluno espera que o professor confirme se o raciocínio que ele usou como resposta a determinado problema, está correto ou não. Assim, a professora negocia uma nova regra: os alunos perceberão durante o processo se o que fizeram na atividade 1, estará certo ou não.

Após serem expostas as novas regras para o jogo didático e os alunos não esboçarem nenhuma reação contrária, a introdução a que a professora se refere, é iniciada imediatamente. Vejamos um pouco desse momento no recorte de protocolo do quadro 22.

P – Muito bem. Onze palitos. Vocês concordam que esses números (aponta) que a gente usou nessas construções, o número três, cinco, sete, nove, onze, tá seguindo uma sequência? Tá seguindo uma sequência numérica. Mas qual é o segredo dessa sequência? (silêncio) Pelo que a gente tá vendo aqui? A gente pode descobrir o número da próxima sequência?
A – Pode.
P – Pode. Qual é o número da próxima sequência?
A – Treze.

Quadro 22 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Observamos que no recorte de protocolo do quadro 22 a professora parte da atividade realizada pelos alunos e começa a instigá-los a compreender o que fizeram. Vemos que no momento em que questiona sobre qual é o segredo da sequência numérica (3, 5, 7, 9, 11, ...) e eles silenciam ela refaz sua pergunta para que seja entendida. Acreditamos ainda que a professora pensou em pedir o próximo número da sequência, no entanto o que expressou foi: "*o número da próxima sequência".*

Continuando a professora questiona "*Por que treze*?" Tal pergunta confirma o que havia explicitado em sua negociação inicial: não iria dar respostas.

Podemos perceber também que durante o momento em que a professora negocia o saber, Progressão Aritmética, evidencia-se uma regra implícita: se o aluno responde e a professora repete o que foi falado, significa que está correta a resposta.

Em relação à negociação em torno do saber, vejamos ainda o recorte do protocolo 23:

P – Esse número que eu tô somando, ele é um número fixo ou ele é um número que tá sempre mudando?
A – Tá somando dois.
P - O número que eu tô somando, esse número que eu tô somando à minha sequência, é um número fixo. Então a gente acabou de estudar uma Progressão Aritmética. O que é uma Progressão Aritmética? É uma sequência de números em que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior somado com um número fixo. E esse número fixo é a minha razão, a razão da Progressão Aritmética. Então aqui, esses números: três, cinco, sete, nove e onze, é uma Progressão Aritmética de razão quanto?
A – Dois.
P – Dois. De razão dois, que é um número fixo. Daí a gente descobre quais são os próximos números dessa sequência, né? Porque a gente já conhece a, a razão. Entenderam? Tudo o que vocês fizeram, tudo o que vocês construíram foi pra chegar numa Progressão Aritmética, que a gente chama de P.A. Nas próximas aulas a gente vai descobrir mais sobre P.A. O que é que ela tem mais pra nos dizer, tá? Aí é só começando. Tá bom, gente? Pronto. Por hoje é só.

Quadro 23 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Ao considerarmos esse recorte podemos observar que embora a professora tenha iniciado a partir da produção do aluno, ao fazer uma pergunta sem obter resposta, expõe o que é razão e Progressão Aritmética, sem muitos questionamentos. Acreditamos que tal fato ocorreu porque a aula estava prestes a terminar e a professora achou que os alunos não chegariam à conclusão que esperava. Então, diante do pouco tempo que faltava para a aula acabar, resolveu expor o conhecimento e repetir os pontos relevantes para que os eles entendessem o que é razão, e o que é P.A.

Ainda pudemos perceber que quando falou "*nas próximas aulas a gente vai descobrir mais sobre P.A.",* implicitamente negociou que mesmo que não desse tempo para entenderem naquele momento, ela estava assumindo a responsabilidade de oportunizar ocasiões para que as dúvidas fossem dirimidas.

Embora a professora tivesse estabelecido que haveria mais alguns aspectos de P.A. para serem trabalhados na aula posterior, alguns alunos se incomodaram com o fato de não obterem a resposta da atividade como podemos ver no recorte de protocolo do quadro 24.

A – Professora... (inaudível)
P – Depois a gente vai vendo isso. No decorrer do trabalho vocês vão descobrir fácil, fácil essa resposta, tá? É tudo uma descoberta. Né assim não.
A – Eu tô cansado de ficar curioso.
P – Eu gosto de deixar vocês curiosos.
Ri e termina a aula.

Quadro 24 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Percebemos na fala do aluno uma resistência à regra de que a resposta não seria dada imediatamente pela professora e por isso evidencia-se uma tensão. A professora, no entanto, mantém o que havia proposto e tenta amenizar a insatisfação quando afirma em tom de brincadeira que gosta de deixá-los curiosos e encerra a aula.

4.1.2 Análise da 2ª sessão da aplicação da sequência didática de P.A.

A segunda sessão da aplicação da sequência didática de P.A. foi proposta pela pesquisadora para ser aplicada em duas aulas de 50 minutos. No entanto, do mesmo modo que ocorreu na 1ª sessão a professora aplicou em três aulas de 50 minutos.

<u>Primeira parte da 2ª sessão</u> (duas aulas de 50 minutos cada uma)

A primeira parte da 2ª sessão foi iniciada pela professora fazendo uma retomada do que tinha sido realizado nas aulas anteriores, como podemos constatar no recorte de protocolo do quadro 25.

P - Oh, dando continuidade a nossa, a nossa sequência anterior, né, é... eu queria fazer a retomada do que a gente viu naquele, naquele primeiro momento. Do que a gente trabalhou em grupo, que foi proposto pra vocês na atividade. Vamos relembrar. Primeiro lugar: o que foi que a gente começou a ver, começou vendo nessa atividade.

Quadro 25 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Nesse momento, a professora faz uma avaliação do trabalho, salientando os aspectos positivos e aproveitando para relembrar o que é razão da P.A. e o que é Progressão Aritmética, como expõe o recorte de protocolo do quadro 26.

P - Foi muito produtivo. E depois que a gente viu tudo isso, qual foi a conclusão que a gente chegou? Eu mostrei pra vocês que aqueles números de palitos ia sempre aumentando e aquele número que aumentava, era um número fixo, era um número que não mudava. Eu chamei isso de quê? Alguém lembra?

Quadro 26 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Com o recorte de protocolo do quadro 26, fica evidente que o saber P.A. foi abordado a partir do conhecimento do aluno, onde poderiam responder sem a interferência da professora, indicando regras de um contrato didático do tipo aproximativo.

Após relembrar o que já havia sido feito na 1ª sessão da sequência didática, a professora propõe uma nova atividade e estabelece regras que irão reger essa nova etapa, conforme expressa o recorte de protocolo do quadro 27.

P - ... Foi isso que a gente viu. Então, eu tenho outra atividade pra vocês, tá? Essa atividade a gente vai ver o resultado dela no final assim como agente viu o resultado das primeiras atividades. Oh, essa segunda atividade eu vou querer que vocês se dividam em grupos, tá? É. Dessa vez vocês não vão usar cartolina não. Vocês vão responder essa atividade na folhinha, mesmo e depois vocês vão apresentar, tá? Do mesmo jeito que a gente fez na primeira.
Risos.
P – Mas vai ser mais rápido do que a primeira vez.

Quadro 27 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Vemos que no recorte de protocolo do quadro 27, além das novas regras explicitadas para que a atividade didática funcione e os objetivos sejam alcançados, a presença da influência do tempo nas ações didáticas também é percebida, já que a professora ressalta que “*vai ser mais rápido do que a primeira vez”.*

Percebemos também, que ao entregar a atividade da 2ª sessão, a professora se aproxima dos grupos, mas só fala a um, composto por alunos que faltaram à 1ª sessão, como podemos ver no recorte de protocolo do quadro 28.

P – Você vai observar essas construções daqui e vai responder essa questão pelo que a gente já viu.

Quadro 28 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Com o recorte de protocolo do quadro 28 podemos perceber também uma regra implícita que é a relevância da participação na atividade anterior para o sucesso na atividade da 2ª sessão. Entendendo o que a professora indicou com a fala, um dos alunos desse grupo lê sobre Progressão Aritmética no livro didático para responder as questões propostas. O recorte de protocolo do quadro 29 confirma essa regra de forma explícita. Vejamos:

A – Professora, o segundo como é?
P – Eu acabei de explicar. Você não tava nas outras aulas não? Progressão Aritmética é uma sequência em que o segundo termo menos o primeiro termo é a razão.

Quadro 29 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Apesar de alguns grupos pedirem ajuda à professora para responderem a atividade da 2ª sessão, queremos ressaltar que a maioria dos alunos demonstrou mais autonomia na realização da referida atividade e as dúvidas foram mais evidentes para os alunos que não estavam presentes à 1ª sessão. No entanto, vale salientar que um grupo em que duas das três componentes tinham faltado à 1ª sessão, percebeu um aspecto que os demais não consideraram ao calcularem a quantidade de palitos da septuagésima construção. Vejamos essa situação no recorte de protocolo do quadro 28.

Em outro grupo uma das alunas tenta convencer a colega e como a outra olha para a professora, fala:
A – Eles estão pensando que aqui começou do quatro. Aqui começou do sete. Você tem que analisar isso, também. De três em três.
Outra aluna do grupo não se convence e olha para a professora. Sua colega então fala:
A – Bora na onda da gente. Tu não confia no teu taco não, é?

Quadro 30 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Embora a maioria dos grupos tenha respondido a atividade, formulado e validado as respostas entre si, o recorte de protocolo do quadro 30 demonstra, que alguns alunos ainda não conseguiram se adequar às regras estabelecidas no atual jogo didático, pois esperam que o professor valide ou não um raciocínio, uma estratégia.

Outro fato que já ressaltamos anteriormente e tornou a ser evidenciado em um dos grupos é que marcas de contratos didáticos anteriores se internalizam de tal maneira que persistem e se opõem quase que involuntariamente a novas regras. A exemplo disso, temos o que é exposto no recorte de protocolo do quadro 31.

P - Se você tem uma expressão que explique a quantidade de palitos. No lugar do número quadrados coloca uma letra.
A – Entendeu?
A outra aluna fala:
A – X.
A – x é sempre o resultado. X é duzentos e vinte.

Quadro 31 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Assim podemos ver explicitamente uma regra implícita: um resultado é sempre x e um número desconhecido é sempre x. Diante disso, a professora insiste e renegocia esse aspecto do saber como é percebido no recorte de protocolo do quadro 32.

P – Eu quero uma expressão que explique isso. E não quantos quadrados tem. Como se fosse uma formulazinha, uma equação. Você disse que duzentos e vinte é ... (inaudível)... como é que você encontraria uma expressão. O número de palitos é P o número de quadrados é n. N vai ser quantos palitos de P? Como foi que você chegou a duzentos e vinte palitos? Você só chegou somando?
A – Foi.
P – Então explique com suas palavras uma maneira de calcular, explique como foi que você desenvolveu esse cálculo aqui.
A – Então aqui, no caso...
P – Não, porque você não escreveu nenhuma expressão. Você apenas somou.

Quadro 32 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Após esse momento de conflito entre regras de contratos anteriores e do atual contrato, os grupos entregam as atividades e a professora então avisa que na próxima aula haverá as apresentações.

Segunda parte da 2ª sessão (uma aula de 50 minutos)

A aula é iniciada e a professora negocia que os dez primeiros minutos serão disponibilizados para que os alunos relembrem nos grupos a atividade que fizeram na aula anterior e para que os alunos que haviam faltado à referida aula se integrem a um grupo e tomem conhecimento do trabalho realizado.

Após esses dez minutos, a professora convida os alunos a apresentarem as respostas da atividade da 2ª sessão.

O primeiro grupo que se propõe a apresentar responde todas as questões, e embora não esteja correta, escreve uma fórmula que se aproxima do termo geral da P.A. (7, 10, 13, 16,...), expondo com segurança as soluções encontradas pelo grupo.

O que nos chamou a atenção sobre o grupo 1 foi o fato de que ao final da apresentação, quando perguntaram se havia algum questionamento por parte da turma, a professora falou:

P - Você tinha me falado antes que você usou um raciocínio pra chegar a essa fórmula aí, lhe parecia familiar. Não foi? Você disse...Essa fórmula você usou aí embaixo: 3n + 1 = P. Você disse que teve alguma ideia pra chegar a isso aí de algum assunto que você estudou.

Quadro 33 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Esse recorte de protocolo do quadro 33 demonstra que a professora, devido a sua proximidade com o saber em jogo na cena didática, tenta oportunizar uma situação para que os alunos percebam a relação entre a Progressão Aritmética e função, visto que a P.A. é uma função. Apesar da aluna representante do grupo ter comentado sobre essa relação quando fazia a atividade na aula anterior, ao ser questionada, falou que não se lembrava do comentário feito. Acreditamos que o esquecimento pode ter sido motivado pelo nervosismo com a apresentação, no entanto, pelo fato dela ter algebrizado e encontrado a relação funcional ($3n + 1 = P$), entendemos que a professora poderia ter feito alguns questionamentos à referida aluna e assim, estabelecer a conexão da P.A. ao estudo das funções.

Depois desse momento, um dos grupos não quis apresentar. A professora para terminar o conflito, já que uma regra foi quebrada, renegocia como indica o recorte de protocolo do quadro 34.

P – Quem é o próximo? Quem é o próximo, por favor?
A – É a mesma coisa deles.
P – Ou seja, você fez como eles?
A – Fizemos juntos, eles fizeram no grupo deles e a gente fez separado. Calculamos junto. Aí deu a mesma coisa.

Quadro 34 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

A situação retratada no recorte de protocolo do quadro 34 evidencia a renegociação da regra estabelecida anteriormente de que todos os grupos deveriam apresentar o que produziram. No caso, implicitamente entendeu-se que já que fizeram juntos não precisavam apresentar.

Ainda, durante as apresentações a professora pergunta se há outros grupos para exporem suas apresentações, e nenhum se disponibiliza. A professora indica um grupo e convence-o que o que apresentarão será importante para o entendimento do conteúdo. Vejamos parte da apresentação do grupo referido no recorte de protocolo do quadro 35.

P – Qual foi o esquema?
A - Somando de três em três até encontrar o resultado. No segundo foi, a pergunta foi com respeito se a sequência numérica era uma progressão aritmética. A gente respondeu que sim, porque a sequência dos números foram somadas com a razão. O terceiro, (lê): mantendo o padrão apresentado na figura determine o número de palitos utilizados nesse número aqui, que eu não sei professora, e escreva como chegou ao resultado. Nosso resultado deu 220 palitos.
P – Muito bem.

Quadro 35 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Ainda, no recorte de protocolo do quadro 35 vemos que a professora validou como certa a resposta do grupo 4, pois foi a única vez que disse *muito bem* ao final de uma apresentação. Também incentivou o grupo a revelar o porquê da resposta ter sido diferente dos demais grupos, como é constatado no recorte de protocolo do quadro 36.

A – A gente só somou de três mais três, mais três, mais três...
P – Mas vocês somaram três mais três, partindo de quê, do começo era o número três, é?
A – Não, a partir do sete.
P – Aí você...
A – Por isso que muitos deles deu resultado diferente. Porque começaram a partir do três. A gente começou a partir do primeiro resultado. Do sete, dez, treze, dezesseis.

Quadro 36 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Nesse recorte de protocolo do quadro 36, a professora oportuniza um momento para que os alunos confrontem suas estratégias de resolução e assim, validem o resultado correto.

Queremos salientar que o grupo 2 também havia encontrado o resultado de duzentos e vinte palitos para a septuagésima construção. No entanto, não explicitou o raciocínio durante a apresentação para a turma. O recorte de protocolo do quadro 37 expõe os dois momentos do grupo 2. Vejamos:

No grupo:
A – A sexta figura tem vinte e dois. Aí se eu multiplicar seis por três, dá doze, dezoito no caso mais quatro dá vinte e dois. Tá entendendo? Sempre, sempre o número da figura mais quatro vai dar número de palitos da figura que eu quero, tá ligado? Sempre somando com quatro. Independente da sequência, a sequência...
...
Caio - Ou seja, eu vou arriscar meu palpite: setenta e dois, multiplicado por três dá duzentos e dezesseis.
A – Duzentos e vinte.
Caio – Porque aqui no caso é com mais... A resposta vai ser duzentos e vinte.
Outro aluno:
A – Mais três?
Caio - Eu acrescentava quatro. A figura setenta e dois vai ter duzentos e vinte palitos.

Apresentação:
A - O terceiro é... mantendo o padrão da figura, determine o número de palitos utilizados na septuagésima segunda construção e escreva como chegou ao resultado. O resultado da gente deu diferente, deu duzentos e dezenove. A gente multiplicou o número da figura e ... e multiplicando o número da figura pelo P.A. que somou com três que deu esse resultado

Quadro 37 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Observando o recorte de protocolo do quadro 37 percebemos que um dos alunos estava com o raciocínio correto, ou seja, havia encontrado o termo geral da P.A. (7, 10, 13, 16, ...), mas que não foi aceito pelo grupo, já que na apresentação ele não expôs o que tinha pensado e comunicado para seus colegas. Acreditamos que o referido aluno não conseguiu argumentar convincentemente de maneira que outra resposta foi apresentada como sendo a do grupo. Após as apresentações, a professora fala sobre o trabalho dos grupos, avalia o que realizaram como podemos ver no recorte de protocolo do quadro 38.

P – Olhe, eu acho que vocês estão ansiosos para saber, na realidade, quantos palitos foram utilizados nessa construção aí do terceiro, né? Oh, primeiro o que eu gostei de todas as apresentações foi porque vocês conseguiram identificar uma Progressão Aritmética. Todos os grupos, sem exceção, afirmaram que era uma sequência e que essa sequência era de razão três. Eu acho que o objetivo maior aí foi alcançado, porque vocês identificaram a Progressão, a sequência e a razão, né. Porque isso aí foi o que a gente trabalhou nessas últimas aulas. Agora, é...essa primeira questão que pedia pra vocês fazerem a sequência, aqui como todo grupo aprendeu o que era a sequência e o que era a progressão, todo mundo conseguiu fazer. O segundo, também responderam que é uma progressão aritmética. O terceiro, só foi um grupo que conseguiu chegar à resposta. Foi o grupo das meninas (aponta para o grupo 3).

Quadro 38 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

A professora salienta que embora o grupo tenha acertado a resposta, a estratégia que usaram, foi demorada. Uma das alunas do grupo insiste que o importante é terem acertado. A professora, então indaga:

P – Vocês conseguiram chegar à resposta, mas vocês sofreram um pouquinho pra chegar nessa resposta.
A – Mas chegou.
P – Chegou, mas sofreu. Será que se eu pedisse a você, é...na construção número seiscentos?
A – A gente pegava um caderno pequenininho e saía...
A - Chegava lá.
P – E se eu pedisse a construção de número mil e quinhentos?
A – A gente sairia botando: um, dois, três, quatro...
P – Não. Vocês não iriam conseguir fazer.
A – Professora...

Quadro 39 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Com esse recorte de protocolo do quadro 39, a professora expressa e negocia que é importante o uso de fórmulas para que o tempo didático nas aulas de matemática seja melhor aproveitado. Também, implicitamente é colocado para os alunos, a relevância e utilidade do saber construído historicamente.

Após essa situação, a professora passa a etapa da institucionalização do saber. Novas regras são negociadas, como por exemplo, que os alunos devem estar atentos, devem responder quando indagados, etc. Uma negociação em relação ao saber P.A. é explicitada:

P – Agora, oh, a partir daqui a gente pode calcular uma fórmula pra gente calcular qualquer número de termos, tá? Então vamos escolher um número, oh... Que letra, ou que representação você daria pra um número que você não conhece?
A – x.
P – x. Ah, mas vamos trabalhar com n. Por que n é um número que a gente não conhece. Então eu quero descobrir um termo, uma fórmula que descubra, que permita a gente calcular qualquer número de termos. Se n é o meu número, no lugar desse setenta e dois, eu vou pra essa fórmula aqui (aponta).

Quadro 40 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Observamos que mais uma vez uma regra implícita que é vigente nas aulas de matemática e que durante o trabalho na atividade da 1ª sessão havia sido evidenciada é explicitada: um número desconhecido sempre é x. No caso da P.A., como na fórmula do termo geral o número de termos é n, a professora negocia que não será x, mas n. Os alunos não questionam e embora não tenham esboçado reação contrária, o fato de mais uma vez a professora pedir para usarem n, reflete que há regras que estão internalizadas de tal modo que sem que percebamos, voltamos sempre a elas.

Com a institucionalização da fórmula do termo geral a professora negocia com os alunos, que o problema P_1 será devolvido e que eles deverão resolvê-lo baseando-se no que aprenderam. Alguns alunos dizem que com a fórmula fica mais fácil. Um dos alunos questiona como vemos no recorte do quadro 41.

A – Professora, essa fórmula já existe?
P – Sim.
A – E a gente aqui...

Quadro 41 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

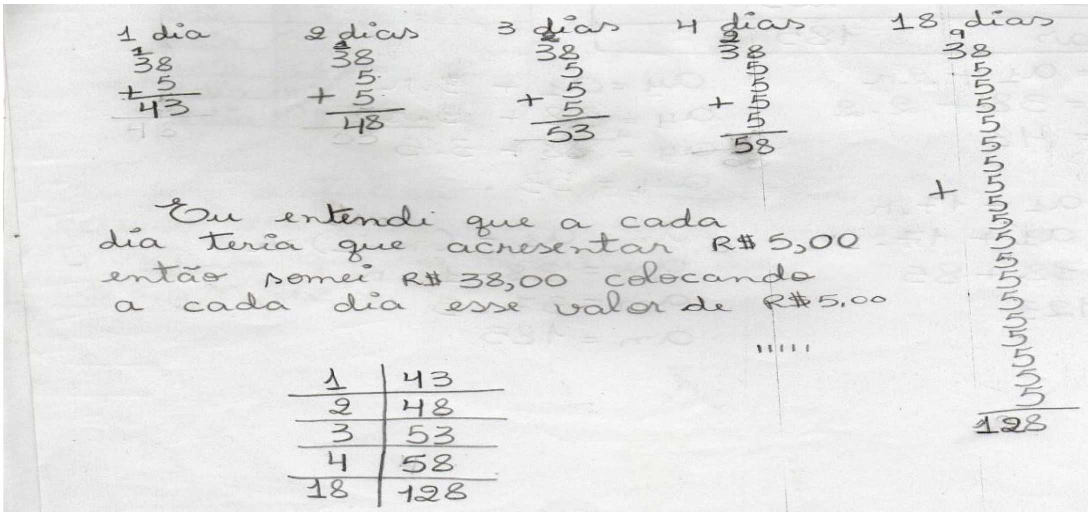
A fala do aluno nos indica que no momento em que ele questiona se a fórmula já existe, expressa certa resistência à maneira como foi conduzido o jogo didático. Indica também que ocorreu um processo para que a fórmula do termo geral fosse compreendida, ou seja, expôs-se o saber como construído e não pronto, passivo de repetição. Assim, percebemos que regras do contrato didático do tipo aproximativo são evidenciadas durante a aplicação da sequência didática de P.A.

4.2 Análise comparativa entre as estratégias previstas na “análise a priori” e as estratégias utilizadas pelos alunos.

Para analisarmos comparativamente as estratégias usadas pelos alunos seguiremos a estrutura da “análise a priori”. Assim, procederemos a análise de P_1 e depois passaremos a análise dos itens da atividade.

<u>Problema P_1</u>

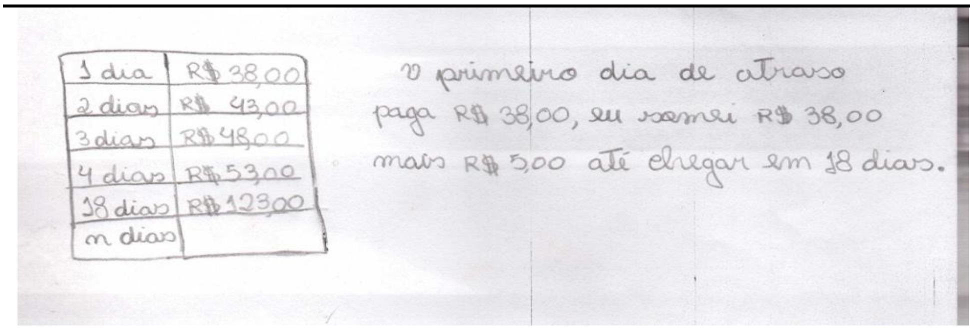
Para resolver a 1ª parte do problema P_1(cálculo da multa do 1º ao 4º dia), observamos que todos os alunos usaram a estratégia $\mathbf{E_1}$, em que se escreve a multa do primeiro dia (R$ 38,00) e soma cinco reais para obter o valor do dia seguinte. Segue um exemplo de protocolo que mostra o uso da estratégia E_1.



Quadro 42 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

O protocolo do quadro 42 evidencia também o uso do cálculo aritmético e da tabulação para encontrar a resposta do problema P_1.

A 2ª parte de P_1 (multa do 18º dia) foi resolvida pela maioria dos alunos com uso de E_2, onde se escreve 38 para o primeiro dia e vai somando 5 até chegar ao décimo oitavo dia, conforme podemos perceber no protocolo do quadro 42.



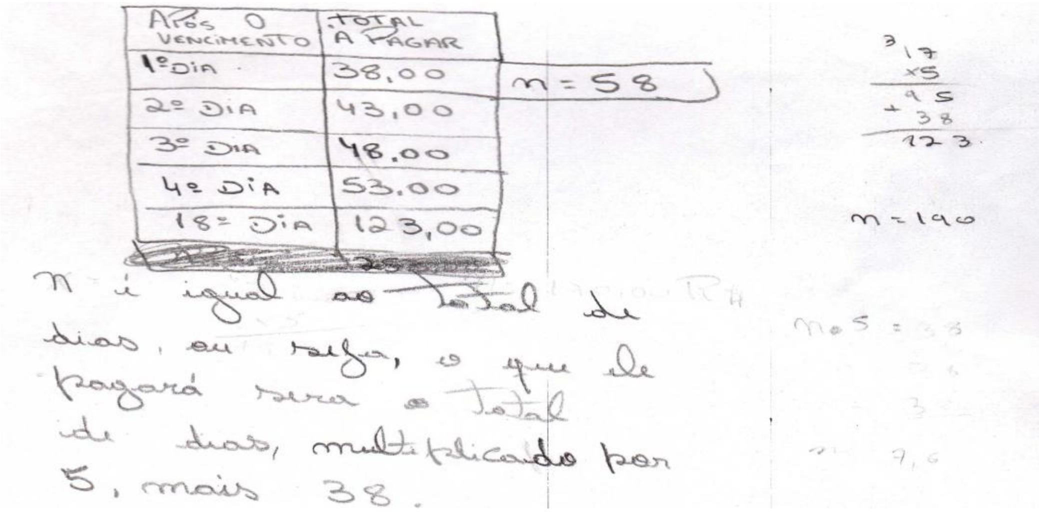
Quadro 43 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Observamos que o recorte de protocolo do quadro 43 expõe apenas o uso de tabulação para realizar a estratégia E_2.

Ainda em relação a 2ª parte de P_1 apenas dois alunos utilizaram estratégia diferente de E_2, pois, um desses alunos usou a estratégia E_1 e o outro estabeleceu uma estratégia que não foi prevista na análise a priori que fizemos.

No quadro 44, para chegar à resposta, o aluno usou o cálculo multiplicativo, o que demonstra uma aproximação para o processo de algebrização.

Vejamos essa estratégia no recorte de protocolo do quadro 44.



Após o vencimento	Total a pagar
1º dia	38,00
2º dia	43,00
3º dia	48,00
4º dia	53,00
18º dia	123,00

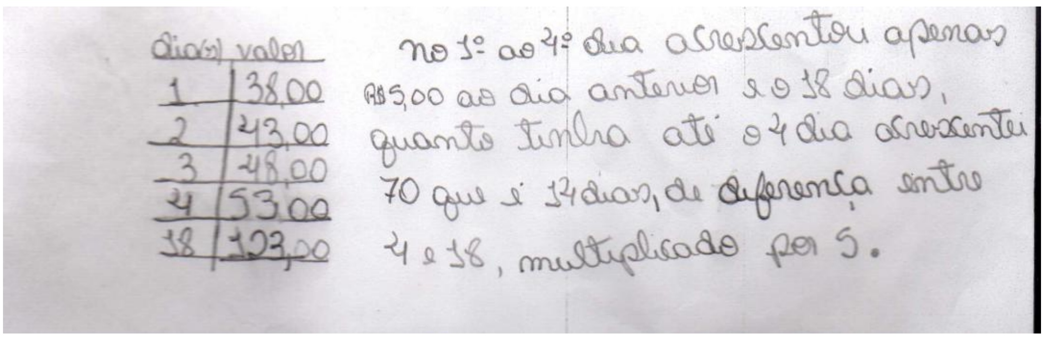
n = 58

17
×5
85
+38
123

n é igual ao total de dias, ou seja, o que se pagará será o total de dias, multiplicado por 5, mais 38.

Quadro 44 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

O recorte de protocolo do quadro 45 expõe uma estratégia que não previmos. Vejamos:



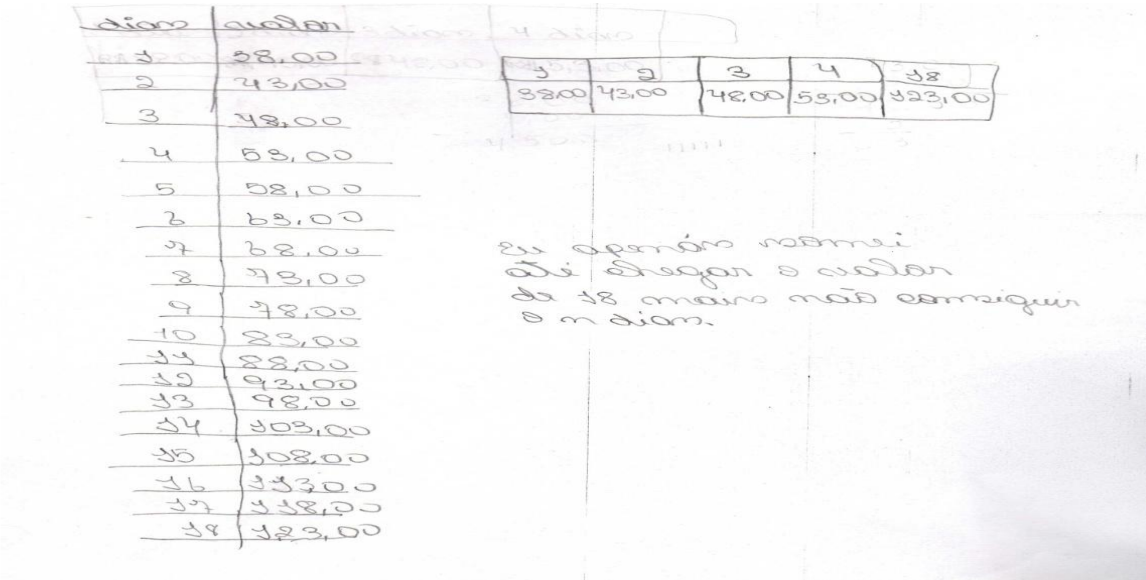
Dia(s)	valor
1	38,00
2	43,00
3	48,00
4	53,00
18	123,00

no 1º ao 4º dia acrescentou apenas R$5,00 ao dia anterior e o 18 dias, quanto tinha até o 4 dia acrescentei 70 que é 14 dias, de diferença entre 4 e 18, multiplicado por 5.

Quadro 45 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

O recorte de protocolo evidencia que o aluno conseguiu estabelecer uma generalização a partir do momento que somou o 4º termo da P.A. com o produto de catorze dias pela razão r = 5, ou seja, percebeu que $a_{18} = a_4 + 14r$.

Já a 3ª parte de P_1, não foi resolvida por nenhum aluno. O protocolo exemplifica o momento em que um dos alunos escreve sobre a dificuldade de resolver essa parte de P_1 e demonstra sua dificuldade em algebrizar.



Quadro 46 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Vejamos algumas estratégias da atividade da 1ª sessão.

Atividades 2, da 1ª sessão

Para os alunos resolverem a atividade 2, da 1ª sessão, foram dispostos em três grupos. Cada grupo respondeu os cinco itens da atividade na folha de cartolina. Segue as respostas dos três grupos.

Grupo 1

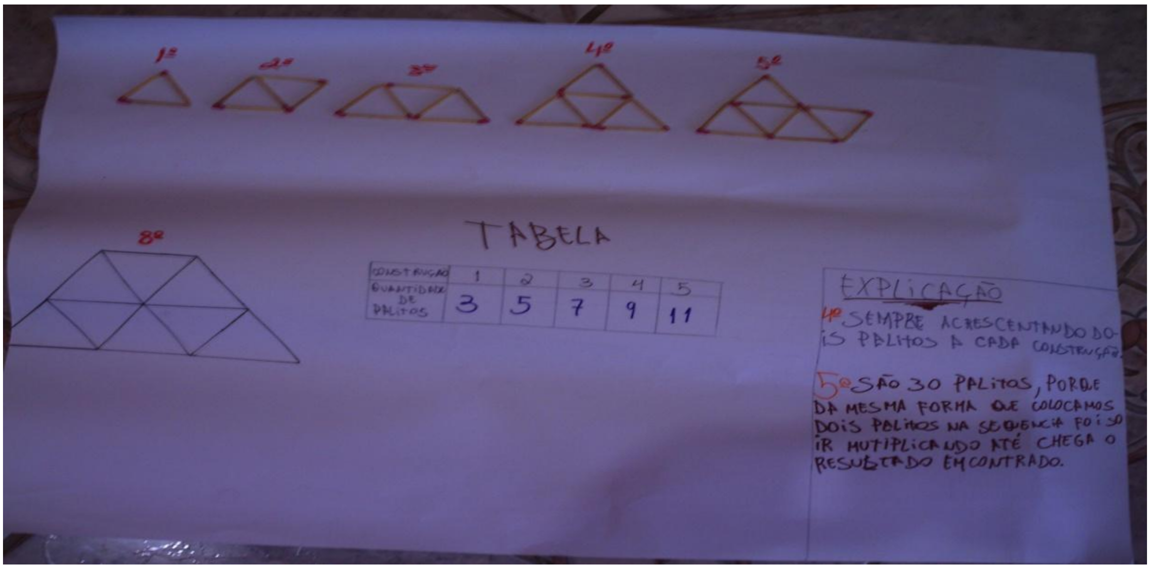


Figura 18: Recorte da produção do grupo 1.

Grupo 2

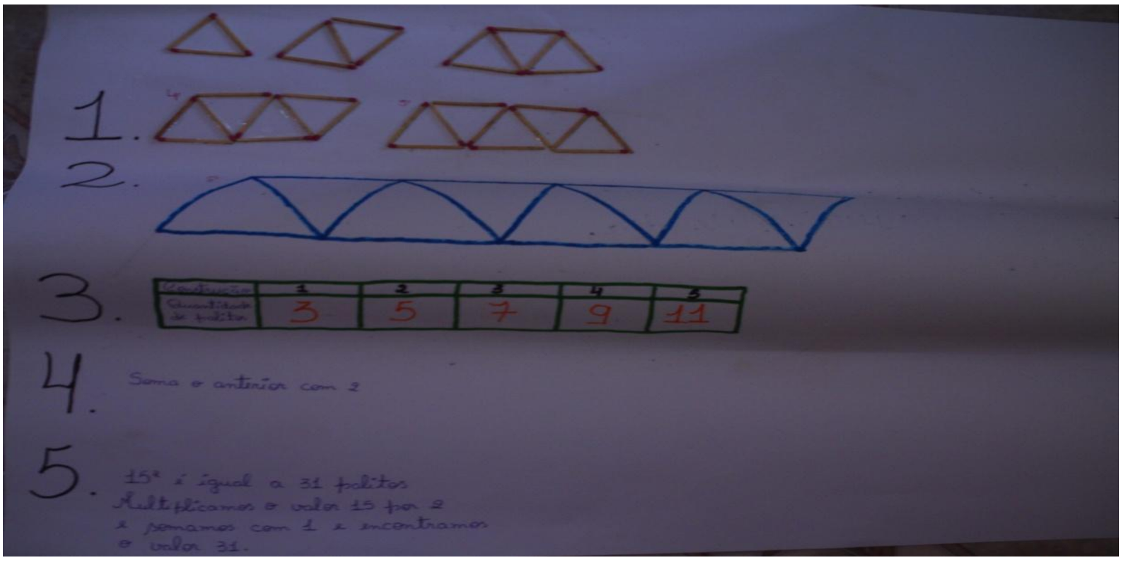


Figura 19 - Recorte da produção do grupo 2.

Grupo 3

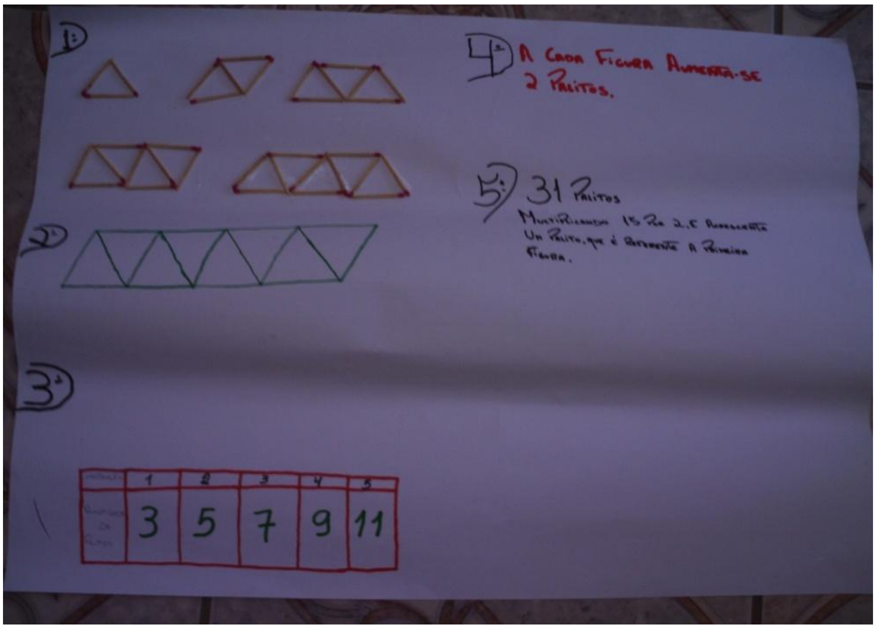


Figura 20 - Recorte da produção do grupo 3

O item1 foi respondido por todos os grupos. Apenas um dos grupos não seguiu o padrão estabelecido e fez a construção com palitos de maneira diferente.

Para o item 2, observamos que todos os grupos representaram a 8ª construção, mas o grupo que não havia seguido o padrão no item 1, representou a figura da 8ª construção de maneira coerente com a representação do item 1.

A tabela do item 3 foi respondida por todos os grupos.

Ao responderem o item 4, os grupos escreveram a estratégia prevista E.

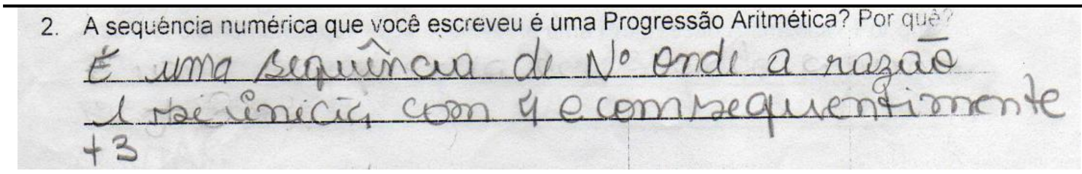
Já no item 5, o grupo que empregou a estratégia $\mathbf{E_1}$, em que acrescentava-se dois à construção anterior para encontrar um termo, escreveu que o resultado para a 15ª construção com triângulos seria 30 palitos, quando a resposta correta seria 31 palitos. Acreditamos que o grupo chegou a esse resultado por um erro na contagem.

Os outros dois grupos utilizaram uma estratégia que não foi prevista na análise a priori: multiplicar 15 por 2 e somar com 1.

Atividade 1, da 2ª sessão

Os itens da atividade 1, da 2ª sessão foram realizados por sete grupos que responderam cada item.

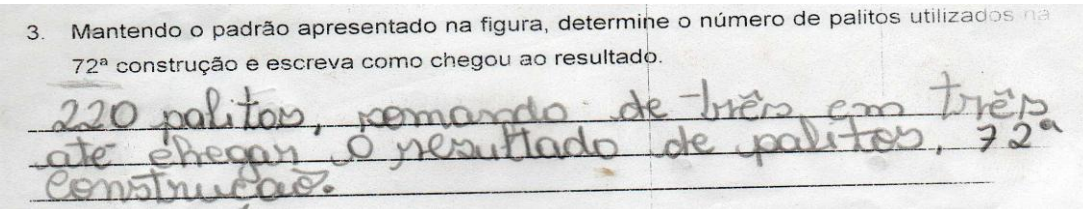
Todos os grupos completaram no item 1, a sequência numérica referente à quantidade de palitos usada nas cinco primeiras construções com quadrados. No item 2, todos os grupos afirmaram que a sequência do item 1 era uma P.A. e explicaram o porquê. Percebemos nas explicações que todos os grupos compreenderam o que é razão de uma P.A. embora alguns grupos ainda não tenham conseguido expor com clareza como vemos no protocolo.


2. A sequência numérica que você escreveu é uma Progressão Aritmética? Por quê?

É uma sequência de Nº onde a razão 1 se inicia com 4 e consequentimente +3

Quadro 47 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

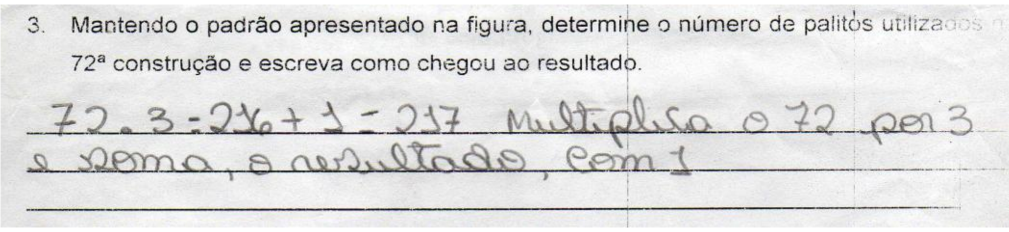
No item 3, apenas um grupo utilizou a estratégia E_1 , onde cada termo é obtido somando 3 ao termo anterior e foi este grupo que chegou a resposta correta. O protocolo referenda esse fato.


3. Mantendo o padrão apresentado na figura, determine o número de palitos utilizados na 72ª construção e escreva como chegou ao resultado.

220 palitos, somando de três em três até chegar o resultado de palitos, 72ª construção.

Quadro 48 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Os demais grupos, apesar de não conseguirem encontrar o resultado certo, levantaram hipóteses e estabeleceram uma generalização ao realizarem o cálculo da quantidade de palitos da 72ª construção. Vejamos a estratégia de um dos grupos:



3. Mantendo o padrão apresentado na figura, determine o número de palitos utilizados n
72ª construção e escreva como chegou ao resultado.

72 . 3 = 216 + 1 = 217 Multiplisa o 72 por 3 e soma, o resultado, com 1

Quadro 49 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Observamos que o raciocínio demonstrado no recorte de protocolo mostra um equívoco do grupo: calculam a quantidade de palitos de setenta e dois quadrados e não da septuagésima construção que é composta por setenta e três quadrados. Acreditamos que isso tenha acontecido por associarem a primeira construção com quadrados à primeira construção com triângulos da sessão 1, já que a construção coincidia com a quantidade de triângulos. Assim, o grupo não observou que a primeira construção com quadrados não era composta por um quadrado, e sim por dois quadrados. Salientamos, no entanto, que o fato da figura 15 (construção com quadrados), ter sido modificada, pode ter influenciado na resposta desse grupo.

Para o item 4, apenas três grupos conseguiram estabelecer uma hipótese, apesar de não terem um raciocínio coerente com o que foi apresentado. A estratégia que foi usada se aproxima de E_2 ,onde a expressão seria P = 3n + 4.

Vejamos o recorte de protocolo:

4. Escreva uma expressão matemática que indique o número **P** de palitos em função do número **n** de ~~quadrados~~ construção.

$n.3 - \boxed{3n + 1 = P}$

Quadro 50 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

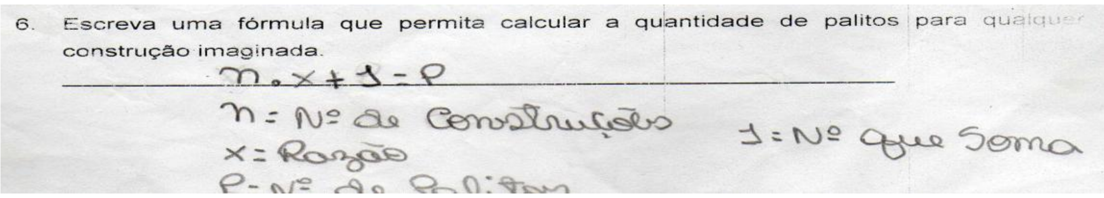
No item 5 podemos ver novamente que um dos grupos associou na íntegra o raciocínio que utilizou na construção com triângulos para qualquer construção imaginada. Salientamos, porém que esse raciocínio deve ser valorizado, pois demonstra que o aluno não estava passivo e reproduzindo algo que o professor lhe apresentou, mas levantou hipóteses, pensou sobre o que lhe foi proposto.

5. Explique com suas palavras, uma maneira que você pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos, em diferentes construções imaginadas.

Multiplica o Nº de construções pela razão e some com 1.

Quadro 51 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

O item 6 não foi respondido corretamente por nenhum grupo, o que abriu precedente para que professora iniciasse a etapa da institucionalização da fórmula do termo geral. O grupo que utilizou a contagem para calcular a quantidade de palitos da 72ª construção foi o único que deixou em branco o referido item. Os demais estabeleceram uma hipótese mediante o que haviam respondido nos itens anteriores. Vejamos o que o grupo que havia estabelecido que P = 3n + 1 para o item 4, pensou.


6. Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de palitos para qualquer construção imaginada.

$n \cdot x + 1 = P$

n = Nº de Construções

x = Razão

P - Nº de Palitos

1 = Nº que Soma

Quadro 52 - Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de P.A.

Com o recorte de protocolo, observamos que embora não tenha chegado à fórmula do termo geral de uma P.A., o grupo expressou seu raciocínio na linguagem algébrica. Isto representou um avanço na aprendizagem e, portanto, uma mudança da relação inicial dos alunos com o saber, já que no começo da sequência didática, quando em P_1 foi pedido que escrevessem uma expressão para representar a multa para n dias, nenhum dos alunos havia apresentado resposta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral dessa pesquisa foi investigar como a professora negocia o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada, para o ensino de Progressão Aritmética.

Os sujeitos participantes desse estudo foram uma professora de Matemática e seus alunos do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola pública da rede estadual de ensino de Pernambuco, durante um período de seis aulas de cinqüenta minutos, cada uma. Iniciamos a videografia dessas aulas no momento em que a professora começou a aplicar a sequência didática de P.A., elaborada pela pesquisadora.

Essas seis aulas filmadas foram transcritas e depois analisadas conforme aspectos da teoria do Contrato Didático de Guy Brousseau. Mais especificamente procuramos identificar e analisar as rupturas que aconteceram das regras preestabelecidas pela pesquisadora e as renegociações que foram feitas pela professora com os alunos durante a aplicação da sequência didática de P.A.

Com nossa investigação percebemos que apesar da pesquisadora ter elaborado uma sequência didática de Progressão Aritmética baseando-se nos moldes de um contrato didático do tipo aproximativo, visto que nessa sequência as atividades buscaram contemplar as fases descritas por Brousseau na Teoria das Situações Didáticas, aconteceram, durante a aplicação da sequência didática, alguns conflitos com as regras predeterminadas.

Os conflitos geraram rupturas, que quase sempre estavam relacionadas com marcas de contratos didáticos anteriores, como por exemplo, quando inicialmente o aluno deveria resolver as atividades sem auxílio da professora e esta, contrariando uma das regras predeterminada, dava pistas, orientava-os. Ainda aconteceram momentos em que as explicações eram dadas apenas a alguns alunos, evidenciando também um contrato diferencial.

Destacamos ainda, que percebemos um contrato diferencial não apenas entre professora e alunos, mas também entre os próprios alunos. Isso porque, durante a realização das atividades, um grupo assumiu como resposta uma solução errada pelo fato de que quem a formulou foi um aluno que se destacava na aula e sobre o qual havia expectativas positivas na relação com o saber. Outro fato semelhante aconteceu, quando um dos alunos respondeu e validou a resposta, porque confirmou com uma aluna que também era vista como uma das alunas que possuía uma relação mais próxima com o saber.

Outra ruptura com as regras predeterminadas refere-se ao tempo previsto para a aplicação da sequência didática, visto que a pesquisadora elaborou a sequência para ser aplicada em quatro aulas de cinquenta minutos cada uma e como já dissemos anteriormente, a professora usou seis aulas. Acreditamos que isso aconteceu, porque as duas primeiras aulas da aplicação da sequência foram aulas do início do turno e a turma só entrou na sala de aula vinte minutos depois do horário previsto.

Destacamos também, que embora não tenhamos como objetivo analisar se houve aprendizagem com a aplicação da sequência didática que propomos, os alunos estabeleceram algumas estratégias que não previmos na análise a priori que fizemos das atividades. Isto nos fez refletir que ao se oportunizar momentos e situações favoráveis à aprendizagem, o professor está contribuindo para que se ampliem as possibilidades de aprendizagem para o aluno, visto que ele é instigado a pensar.

Desta forma, concluímos que ao investigarmos como a professora negociou o contrato didático com alunos do 2º ano do Ensino Médio, na aplicação de uma sequência didática previamente elaborada, para o ensino de Progressão Aritmética contribuímos para a reflexão sobre a relação didática e sua dinamicidade.

Acreditamos também, que nosso estudo indica caminhos para outras pesquisas, como por exemplo: como o contrato didático preestabelecido ao se elaborar a referida sequência pode influenciar a aprendizagem; por que o professor prefere ensinar P.A. de modo tradicional; qual a relação entre contrato didático e transposição didática ao se abordar, por meio de uma sequência didática, a P. A.; como se dá a construção do conceito de P.A. a partir da aplicação de uma sequência didática; por que as pesquisas buscam entender a dificuldade do aluno em construir a fórmula do termo geral; por que os documentos oficiais referendam o uso de funções e os livros não trazem tal discussão em suas propostas didáticas; e ainda, levantamento de estratégias mobilizadas pelos alunos para construir o modelo de fórmula geral de P.A.

Assim, são várias as possibilidades de novos estudos que podem ser evocados a partir das reflexões que fizemos, ou mesmo daquelas que nos passaram despercebidas.

REFERÊNCIAS

ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões**. Dissertação (Mestrado) PUC-SP: São Paulo, 2008.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática.** Recherches em Didactique des Mathématiques, pp. 41-66, 1992.

BRASIL, **Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)**. Brasília MEC/SEM, 2008.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).** Brasília MEC/SEM, 1999.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio + (PCN+).** Brasília MEC/SEM, 2002.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. **Contrato Didático e Transposição Didática:** inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. 410f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BROUSSEAU, G. . **Fundamentos e métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a, p. 34-113.Tradução-Maria José Figueiredo.

________________ . **Os diferentes papéis do professor**. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. . Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b, p. 48-72.

CARVALHO, C.A.S. **O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética**. Dissertação (Mestrado) PUC-SP: São Paulo, 2008.

CHARNAY, Roland. **Aprendendo (com) a resolução de problemas**. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. . Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 36-47.

CHEVALLARD, Yves. **La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné.** Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Ensino Médio**. São Paulo: Ática, 2004. 1ª série.

___________________. **Matemática: Ensino Médio.** São Paulo: Ática, 2008. Volume único**.**

DORNELAS, Julianne Jane Barbosa. **Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim.** Dissertação (Mestrado) UFRPE: Recife, 2007. 118 p.

FERREIRA, Cristiane R. M. **Os alunos do 1º ano do Ensino Médio e os padrões:** observação, realização e compreensão. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. 119 p.

GÁLVEZ, Grecia. A Didática da Matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). **Didática da Matemática**: Reflexões Psicológicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 2, p. 26-35.

GIOVANNI, José Ruy e BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa.** Ensino Médio, 1ª série. São Paulo : FTD, 2005.

IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar.** São Paulo: Atual, 1993.

JONNAERT, Philippe. **Criar Condições para Aprender.** Porto Alegre: Artmed, 2002.

LDB **- Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei 9.394/96. Disponível em <http://portal.mec.gov.br> [08/11/2010].

LINS LESSA, M.M. (2005). **Aprender álgebra em sala de aula**: contribuição de uma seqüência didática**.** Tese de Doutorado não publicada. Curso de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

LUDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas,** 1ª reimpressão, S. Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197 – 212.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto alegre: Artes Médicas, 1996.

PNLEM **- Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio. 2009.** Disponível em <http://portal.mec.gov.br> [08/11/2010].

SMOLE, Kátia C.S.; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática.** São Paulo: Saraiva, 2005.

SOLIS, A. **Argumentação e prova no estudo de Progressões Aritméticas com o auxílio de Hot Potatoes.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008. 184 p.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática,** Portugal, v. 85, p. 14-20, nov/dez, 2005.

APÊNDICE

APÊNDICE A

Orientações da pesquisadora sobre os procedimentos a serem adotados pela professora para aplicação da sequência didática:

1ª sessão

A professora deve iniciar a 1ª sessão distribuindo o problema $P_{1.}$

Após a distribuir P_1, deve ler juntamente com os alunos e pedir que eles tentem resolver individualmente, registrando as estratégias de resolução.

Depois desse momento, ela deve pedir para os alunos relatarem as estratégias utilizadas para resolver o problema.

A professora, no entanto, não deverá validar nenhuma das soluções apresentadas pelos alunos, mas falar para eles que ao final das atividades o problema P_1 será retomado por ela.

Em seguida, deve dispor os alunos em grupo, entregar a cada grupo uma cartolina, caixa de fósforos e atividades a serem desenvolvidas, explicitar que as soluções devem ser registradas na cartolina para ao final serem apresentadas para os demais colegas. Também, deve explicar que as atividades devem ser respondidas sem a ajuda da professora.

Depois do momento de produção em grupo, os grupos devem apresentar suas produções para os demais alunos.

Posteriormente às apresentações de cada grupo, a professora deve exprimir para a classe uma explicação baseada no seguinte texto:

Considerando os resultados das quantidades de palitos necessárias para as construções 1, 2, 3, 4 e 5, temos a sequência numérica 3, 5, 7, 9, 11.

Observamos que a quantidade de palitos, a partir da 2ª construção é igual à quantidade de palitos da construção anterior adicionada a um número fixo de palitos: 2.

1 ª construção → 3 palitos

2ª construção → 5 palitos = 3 + 2

3ª construção → 7 palitos = 5 + 2

4 ª construção→ 9 palitos = 7 + 2

5 ª construção → 11 palitos = 9 + 2

Como uma Progressão Aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão, a sequência da quantidade de palitos 3, 5, 7, 9, 11 é uma Progressão Aritmética e o número fixo 2, é a razão dessa progressão.

2ª sessão

A professora deve iniciar a 2ª sessão a partir de uma retrospectiva do que foi realizado na 1ª sessão.

Após o momento inicial, deve explicitar que as atividades da 2ª sessão devem ser realizadas em duplas e as respostas registradas por cada dupla e apresentadas posteriormente para o coletivo da classe.

Após as apresentações dos grupos, a professora deve institucionalizar como se chega à fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética, baseando-se no seguinte texto:

Para o 6º quesito da atividade 1 da 2ª sessão, devemos encontrar uma fórmula que nos permita obter um termo qualquer de uma Progressão Aritmética, conhecidos o primeiro termo e a razão r da progressão.

Assim, nas construções com quadrados, usamos 7 palitos na 1ª construção, 10 palitos na 2ª construção, 13 palitos na 3ª construção, 16 palitos na 4ª *construção e 20 palitos na 5ª construção. Observamos com isso que a partir da 2ª construção, a quantidade de palitos é sempre a quantidade da construção anterior adicionada ao número fixo: 3.*

Assim, a sequência numérica 7, 10, 13, 16, 20 é uma Progressão Aritmética cuja razão é o número fixo 3.

Daí, temos que

$7 = a_1$

O segundo termo é igual ao primeiro termo adicionado a uma vez a razão r.

$10 = a_2$

$a_2 = a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = a_1 + r$

O terceiro termo é igual ao primeiro termo adicionado a duas vezes a razão r.

$13 = a_3$

$a_3 = a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + r + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

O quarto termo é igual ao primeiro termo adicionado a três vezes a razão r.

$16 = a_4$

$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 2r + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

A partir desses casos particulares, podemos formular a hipótese de que o termo de ordem n é igual ao primeiro termo adicionado a (n – 1) vezes a razão r. Ou seja, a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética de razão r: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots)$ *será:*

$$a_n = a_1 + (n - 1).\ r$$

Com a fórmula do termo geral, podemos responder, por exemplo, quantos palitos serão usados na 72ª construção de quadrados.

$a_n = a_1 + (n - 1).\ r$

$a_{72} = 7 + (72 - 1).\ 3$

$a_{72} = 7 + 71.\ 3$

$a_{72} = 7 + 213$

$a_{72} = 220$

Após a explicação da fórmula do termo geral da P.A., a professora deve retomar o problema P_1 e, a partir das estratégias apresentadas pelos alunos, solucionar o problema, validando ou não algumas das estratégias usadas pelos alunos.

Depois disso, a professora deve entregar, para que os alunos respondam individualmente, o problema P_2, e após essa atividade, encerrar a 2ª sessão.

APÊNDICE B

Transcrição da entrevista com a professora

A pesquisadora realizou uma entrevista aberta com a professora, na qual fez as duas perguntas abertas:

Para você o que é Progressão Aritmética?

Como geralmente ensina Progressão Aritmética aos seus alunos?

A professora respondeu:

P – Bem, a minha definição de P.A. é mais ou menos a definição que está no livro. De que P.A. é uma sequência em que a diferença entre um termo e o anterior a esse termo é sempre constante. Então basicamente é isso de P.A..

P – Agora assim, é eu tenho dificuldade até de responder essa pergunta, porque eu não trabalhei, eu só peguei uma vez uma turma de 2º ano e estou pegando o 2º ano essa vez agora, e não trabalhei, não deu tempo. Eu já peguei a turma já atrasada e não deu tempo de eu trabalhar P.A. Mas assim, eu tenho a idéia de como seria trabalhar P.A. A forma ideal de se trabalhar uma P.A., no caso Progressão Aritméitca. Primeiro, eu acho que o ideal seria através de uma sequência didática, mostrando pra eles os vários tipos de sequências e se possível também, até mostrando a relação com outras disciplinas, e a sequência não só existe em Matemática. Existe em dados estatísticos de Geografia e de outras disciplinas que a gente pode trabalhar essa sequência. Mostrando sempre exemplos práticos, mostrando também o porquê daquela fórmula do termo geral, pra que ele crie algo mais concreto que saia mais do abstrato da matemática. Porque a gente, é... a forma como eu vi P.A. não foi assim. Eu vi P.A. muito como aquela fórmula do termo geral, do a_n, a_1, a soma dos termos. Eu acho que esse não é a forma ideal. Então, eu gostaria de dar uma aula ideal através da sequência didática.

APÊNDICE C

Transcrição da 1ª sessão da Sequência Didática de P.A.

Primeira aula da 1ª sessão (duas aulas de 50 minutos cada uma)

P – Olha gente a nossa aula hoje vai ser uma aula diferente. E essa aula diferente, porque que vai ser uma aula diferente? Geralmente ... Uma aula que vai fugir um pouco da nossa rotina de aula. Por quê? Qual é a nossa rotina de aula? A gente começa nossa aula, acompanhando com o livro, e o primeiro passo do livro é o quê? Dá o tema, o assunto, não é? Ele dá o conteúdo, ele diz pra você o que é que a gente vai estudar. Mas hoje a gente vai fazer diferente. Vamos trabalhar algumas situações, eu não vou falar pra vocês qual é o assunto, qual é o conteúdo. A gente primeiro vai trabalhar pra depois chegar nesse conteúdo. (repete) A gente vai trabalhar sem intitular nada. Então o primeiro passo eu vou distribuir pra vocês, é... um enunciado de um exercício que vocês vão tentar responder, tá? Vão tentar responder da forma de vocês. Pelo conhecimento que vocês têm. Eu não vou direcionar vocês a responder isso aqui não. Você vai responder e depois que você responder da sua forma, você vai registrar, escrever as estratégias que você utilizou pra responder. Ah, primeiro passo eu fiz isso, somei isso fiz aquilo. Você vai dizer, escrever apenas o que você fez. É simples, você não vai utilizar a fórmula pra poder responder isso aqui, você apenas vai fazer pelo que você sabe, é pelo que conhece. Vou distribuir pra cada um.

A professora distribui o material.

P – Esse exercício aqui, ele é individual. Outro que a gente vai fazer depois é que vai fazer em conjunto.

Continua distribuindo o problema P1.

Os alunos começam a ler e a professora interrompe.

P – Eu vou ler com vocês, tá, esse exercício. Posso ler?

E lê P1 No final da leitura afirma:

P – Não se preocupe com n dias. Você vai fazer 1º dia, 2º dia, 3º dia, 4º dia e se souber, n dias.

Então vocês vão tentar montar uma tabelinha de como é que vai ser essa compra no primeiro dia e nos outros dias. Se você fosse fazer essa compra e fosse atrasar. Eu acho que daria pra gente calcular quanto é que a gente vai pagar no primeiro dia, no segundo dia. Então analise como se você tivesse fazendo essa compra e fosse pagar esses juros aí.

Os alunos começam a responder.

P – Querem que eu repita de novo? Não? Mas tem uma pessoa ali que não entendeu. Então vou repetir pra ela e pra algumas pessoas. O contribuinte esqueceu de pagar ..., certo. Por causa disso, ele vai pagar multa. No primeiro dia após o vencimento ele vai pagar R$ 38,00. A multa vai ser isso. A cada dia a partir do 2º dia de atraso seria acrescido 5 reais,

Aluno - Em cima desses trinta e oito?

P – Em cima desses trinta e oito. Então no primeiro dia R$ 38,00, no segundo dia vai ser acrescido mais R$ 5,00., no terceiro dia, quarto dia, quinto dia...

Alunos continuam a responder. Professora interrompe e explica:

P – Aí depois que você construir a multa de R$ 38,00 no primeiro dia, você vai pegar aquela multa de trinta e oito e vai somando, e vai acrescer de cinco. E no nono dia, também. É a multa do anterior mais cinco.

Os alunos continuam individualmente. Um aluno (Pedro) levanta e vai até a professora, e vira as costas pra câmera, falando baixinho.

Ele volta ao lugar e a professora diz:

P – Mas aí você vai ver. Pra chegar

Outra aluna chama.

P- primeiro dia, somando, a cada dia..., vai lendo.

Professora fica próxima a determinada aluna. Essa aluna posteriormente chama a professora e fala alguma coisa...

P – Você registra o que conseguiu, se você não conseguiu, porque não conseguiu.

Outro aluno chama. Professora faz gestos e confirma o que ele pergunta.

Um outro aluno levanta e vai até a professora. Coloca-se em posição que não dá pra se entender o que pergunta.

Uma aluna vai perguntar algo ao colega e quando percebe que a câmera está direcionada, pára.

O aluno (Pedro) vai até a professora, mostra-lhe o que fez e ela diz:

P – Qual foi o raciocínio que você usou?

Outra aluna chama a professora, fala baixinho e a prof. Diz:

P – Aí não sei. N dias não sai?

Olha para Pedro e diz:

P - N dias sai?

Pergunta a Pedro:

P – O seu n dias sai?

Ele responde e alguns riem. A professora pergunta aos demais:

P – Alguém conseguiu fazer o n dias aí?

A – Em cima da multa?

P – É em cima daquele primeiro valor.

P – Olhe, ele perguntou como se há uma fórmula pra calcular esse n dias. Na verdade existe, mas eu não quero que vocês se prendam a isso. Eu quero que vocês tentem resolver pelo que vocês sabem. Se você não conseguir, quando vocês terminarem, aí vocês... Olha para dois alunos que se comunicam na hora da atividade individual.

P- Terminaram?

Pedro – Terminei.

Outro aluno faz algumas perguntas e a professora :

P – É... É...

Outra aluna pergunta e a professora:

P – Não sei, você vai descobrir como é que vai chegar aos dezoitos dias.

Pedro conversa com a professora. E ela lança a pergunta para a turma:

P - Esse n dias será que é um valor que não tem multa? O que é que vocês acham?

A – Vai ter multa não é professora?

P – Vai ter multa, mas depende da quantidade de dias.

Pedro pergunta e a professora diz:

P – Sinceramente eu não sei, a gente vai descobrir.

A - Ei professora, é por que não tem fim?

P – Por que não tem fim? Será? Não sei. Façam o que vocês acham. Depois a gente vai ver.

A – Bota n e aí embaixo bota três pontinhos assim.

Outra aluna:

A – E esse n?

P - Como seria dezoito dias?

E ressalta :

P – Eu gostei da afirmação dele: esse n dias... Como foi? É infinito?

Pedro – Pode ser. Se o cara não pagar multa?

P – Não, ele vai ter que pagar, não é?

Pedro – Mas se demorar?

P – Ah! Entendi o que você quis dizer.

Pedro - Sei lá...

P - Tem gente que ainda falta terminar.

Pedro – Gostei disso.

P – Gostou?

Pedro – o cara quebra a cabeça.

P – Você escreve como você fez. Qual foi a estratégia que você utilizou.

P – Pronto? Pronto?

A – N dias vou colocar x.

P - N dias você vai botar x?

P – Quem é que sabe quanto é n? Eu também não sei...O que é que você acha?

A professora dá mais um tempo para os alunos finalizarem.

P – Não, não entrega não. Todo mundo já terminou, não é? Agora eu queria que alguns de vocês relatassem o que foi que você, qual foi a estratégia que você utilizou pra resolver isso aí. Quem poderia ler pra mim?

Pedro – No primeiro dia, depois da multa eu disse que era trinta e oito reais. Aí eu montei a tabela trinta e oito e coloquei o nome multa e mais o valor da multa, que seria mais cinco reais, que deu quarenta e três. Nisso eu fui aumentando até chegar no quarto, que deu cinqüenta e três. Do quarto para o décimo oitavo, eu peguei os dezoito dias e multipliquei por cinco que deu noventa reais. Desses noventa reais foi o valor da multa e multipliquei por cinqüenta e oito que deu cento e quarenta e três.

P – Foi essa a estratégia que você utilizou?

Pedro – Foi.

P – Alguém... (Olha para Pedro) Mas assim, no primeiro dia qual foi a multa?

Pedro – No primeiro dia foi trinta e oito reais.

P - Alguém mais gostaria de me dizer como foi que fez? Ele (aponta para Pedro) utilizou a estratégia do tipo, pra achar o décimo oitavo dia de multiplicar por cinco. Alguém fez diferente?

A – Eu multipliquei por cinco também. O teu deu noventa reais, o décimo oitavo? O meu deu cento e trinta e oito.

A – Mas porque tu tinhas somado. Deu noventa quando multiplicou.

P – Sim, mas eu acredito que deve ter alguém que deve ter feito diferente. Uma pessoa só me diga como foi que você fez sem ter que multiplicar. Você (aponta para Alice) Como foi que tu fizesse?

Alice – Eu multipliquei, mas eu multipliquei por catorze.

P – Como foi que você fez? Qual foi a estratégia?

Alice – Do primeiro até ao quarto dia, aumentei sempre cinco reais.

P- E no primeiro dia o que foi que você colocou?

Alice – Trinta e oito.

P – Trinta e oito.

Alice – Aí no segundo dia, é mais cinco, deu quarenta e três, aí no terceiro mais cinco, quarenta e oito; aí depois mais cinco, no quarto dia deu cinqüenta e três. Aí dezoito dias não é, a gente não multiplica por dezoito. A gente multiplica por catorze, pois já tem até o quatro. Aí dá cento e vinte e três.

P – Ela não multiplicou dezoito dias por cinco, porque ela já tinha feito quatro dias.

Alguns alunos falam que está certo.

P – Alguém mais fez diferente? Eu acredito que alguém fez diferente. Eu queria escutar. (aponta para uma aluna).

A –

P – Eu não vou responder pra vocês agora, esse problema. Agora a gente vai fazer mais outra atividade, vai ajudar a gente a descobrir o segredo desse problema. A próxima atividade vai ser melhor, porque vai ser assim, em grupo. Vocês vão trabalhar com material concreto, vai ser melhor. Então eu queria que vocês fizessem grupos de cinco pessoas.

A – Quantos?

P – Cinco... Vamos fazer grupo de cinco pessoas?

Os alunos se organizam em três grupos e a professora fala:

P – Esse grupo vai ficar com sete?

P – Vamos fazer o seguinte: vai, vem uma pessoa pra esse grupo daqui. (aponta para outro grupo que estava com cinco alunos)

Assim a turma ficou disposta em três grupos de seis alunos cada um.

A professora então fala:

P – Ora, eu vou distribuir pra vocês... Vocês não vão fazer nada agora... Eu vou dar três para cada grupo (refere-se a atividade em papel A4). Vocês não vão fazer nada nessa folha.

Fala aos grupos que não devem responder nada na folha, que vai explicar o que deverão fazer.

Os alunos começam a ler a atividade que foi distribuída. A professora chama a atenção e diz:

P – Pronto?

P – Olha, vocês vão resolver essas questões na folha de cartolina.

A – Ah...

P – Eu vou distribuir, vai ser uma folha por grupo. Presta atenção. Vou distribuir a folha de cartolina, depois a caixa de fósforos pra vocês montarem isso aí na cartolina e depois, tudo que vocês responderem desse exercício vai ser registrado na cartolina. E depois vocês vão apresentar o que vocês construíram. Tá?

A – Difícil...

P - Não é difícil. Não fiquem assustados. É simples.

E distribui a caixa de fósforos, os lápis hidrocores para passarem as respostas para a cartolina.

Após esse momento, os grupos iniciam as discussões sobre as questões propostas.

Pedro – Professora é pra preencher essa folha?

P – Vocês vão registrar, vocês vão montar essa estrutura na cartolina e tudo o que você for responder, você vai colocar na cartolina porque depois vocês vão apresentar.

A – Pode colocar no caderno?

P – Pode, pode fazer aí e depois passar pra cartolina.

....

Pedro – Professora venha cá, por favor.

P – Olha, eu vou adiantar pra vocês o seguinte: eu não vou poder ajudar a vocês nessa atividade. Nem responder, nem dar ajuda na resposta.

Pedro – Eu sei, mas...

P – Agora vocês vão olhar a construção que tem aí, construir na cartolina e todas as perguntas que tem aí do primeiro ao quinto, vocês vão responder na cartolina. Você pode até fazer um rascunho na folha e depois passar pra cartolina. Depois os três grupos vão apresentar essas respostas pra sala.

Quando a professora termina a aluna do grupo de Pedro diz:

A – Professora, como é esse primeiro?

P – É. Você viu a primeira figura, viu a segunda e a terceira. Então você vai imaginar como será o resto. Seguindo o padrão.

Esse grupo “A” fica discutindo sobre o padrão da figura. Há um impasse, pois o aluno Pedro acha que pode colocar os triângulos de uma maneira que as três meninas do grupo discordam.

O grupo “B” chama a professora e uma das alunas lê o primeiro quesito. A professora então fala:

P – Na figura 7. É essa construção aqui. Você vai olhar essa construção aqui.Você vai olhar a primeira, a segunda e a terceira. E você vai imaginar como é que vai ficar a quarta, a quinta construção.

A – Eu vou montar, não é?

P – Montar. Na cartolina.

A – E aqui...

P – Primeira construção, segunda construção, terceira construção. E você vai fazer a quarta e a quinta.

A – Pode riscar na folha?

P – Pode riscar isso aí. Depois vocês vão montar com palitos de fósforos na cartolina.

A – Aí vai montar duas? Eu já fiz já.

A professora dirige-se ao grupo C e observa. Esse grupo não pede ajuda e a professora se distancia.

O grupo A, começa a discutir sobre como deverá montar a 4ª e a 5ª construção.

Aluna – É desse jeito aí não é não.

Pedro – Pra mim, vai montar assim. Pela lógica é pra colocar aí em cima.

A aluna Gilda mostra as demais colegas e diz:

Gilda – Tem que ser na ordem.

As duas outras alunas concordam com Gilda.

Pedro – Como é que vai colocar esse aí sem fazer a quarta? Vai ser um pra cima outro pra baixo?

Pedro – Essa é a segunda, essa é a terceira. Ele tá pedindo a quarta. Como ficaria? A gente só vai acrescentar mais um em cima. Entendeu?

Gilda – Não. Eu acho que... Eu entendi, mas não aceito.

Pedro – A pior coisa é o cara fazer a coisa quando está em dúvida.

Gilda – Esse, depois esse, depois o quarto, depois o quinto. De lado.

Pedro – Ela não entendeu.

Aluna – Entendi sim. Eu acho que é de lado.

Aluno – De lado mesmo?

Outra aluna do grupo.

A – É assim de lado mesmo.

Os dois alunos demonstram não concordarem, e questionam

Pedro – É a lógica! Vocês têm certeza do que estão falando?

Outra aluna diz:

A – É sim. É a lógica. Quatro! Quatro contra dois.

Pedro – Não, mas, por exemplo, se você fosse construir, se alguém mandasse você construir, qual era, como assim dizer... qual o benefício que traria um bocado de triângulos só em linha reta?

A – Não importa, não importa.

Pedro – Não ficava melhor diferente.

A – Não é o que ficou melhor não. É a lógica. Se esse foi do lado desse, o terceiro do lado do outro, ...

Aluno – E por que ele pediu a quarta figura e a quinta figura?

Gilda – Faz, faz...

Pedro – tá pedindo a quarta e a quinta questão se vai juntar tudo aqui? Tá pedindo a quarta, não tá dizendo que vai juntar não. Não sei se ninguém vai entender.Tem que dizer.

Aluna – Faça do jeito que você sabe.

Pedro – Que eu sei não. O grupo todo.

Aluna – Se a maioria disse que é do lado

Pedro – Entenda a questão, leia,leia,... Ninguém está discutindo aqui não. A gente tá pedindo opiniões diferentes. Leia e entenda. Tá pedindo a primeira, a segunda, a terceira, a quarta e a quinta questão... Ou figura. Qual é a lógica dele pedir quarta e quinta figura, se vai juntar tudo? Ia se tornar uma só. Deu a primeira, deu a segunda, deu a terceira, tá pedindo a quarta e a quinta. Vai ficar a quarta diferente. Seria uma só, se juntar.

Os grupos continuaram fazendo a atividade, quando se ouviu o toque que finaliza a aula. A professora falou que deveriam parar e que retomariam o trabalho na próxima aula que seria na quarta-feira.

Segunda aula da 1ª sessão (uma aula de cinquenta minutos)

A professora inicia a aula pedindo que os alunos refaçam os grupos da aula anterior e indicando que quem faltou se integre a um dos grupos já formados.

Dos três grupos, apenas um já havia terminado na aula anterior. Os dois outros usaram o tempo determinado para concluir a atividade.

Ao concluírem a atividade a professora fala para organizarem as cadeiras para ouvirem as apresentações dos grupos.

P – Vamos? Olha, esse primeiro grupo, eu queria que vocês fossem lá pra frente acompanhando a colega que vai explicar.

P – Eu queria que o restante da turma prestasse atenção nessa apresentação, tá? Todo mundo presta atenção. Por quê? O exercício foi o mesmo, mas podem surgir respostas diferentes, né? Então vamos ver como foi que o primeiro grupo pensou.

Grupo 1

A – Bom, não precisa nem explicar isso daqui, né? Porque é continuando aqui é a terceira, quarta. Aqui é o oitavo e aqui quando a gente... A primeira a gente usa três.

P – Mas que raciocínio você utilizou da primeira pra segunda, da quarta pra quinta?

A – Não, a gente só fez seguir a ordem normalmente.

P – Mas o que mudou aí?

A – O número de palitos. Só isso que mudou, e a ordem. E o tamanho do negócio.

Risos.

A – Aqui, no primeiro a gente utilizou três palitos; no segundo, cinco; no terceiro, sete; no quarto, nove; e no quinto, onze. Foi só acrescentar, aqui a resposta do quarto, só fez acrescentar dois ao anterior. O anterior foi três, dois, sete, ... E no quinto, é... pra ficar mais fácil, pra gente só fez multiplicar: o quinze por dois e somar com um. Que é a mesma coisa daqui, por exemplo, dois vezes um mais dois é três. É só multiplicar o número da construção vezes dois mais um. Aí dá o resultado, que é três, cinco e o daqui debaixo, trinta e um.

P – Muito bem. Palmas gente.

P – Segundo grupo.

Grupo 2

A – A gente primeiro fez isso, tem um triângulo logo e aí a gente foi continuando seguindo a ordem. Acrescentando dois palitos. O segundo, é... o desenho como ficaria a figura, a figura oito. O terceiro, a gente colocou o número de palitos referente a cada figura. No quarto, a explicação, que a cada figura aumenta apenas dois palitos. E o quinto, a gente explicou pra ficar mais fácil, parecida com a explicação dela (aponta para a aluna do grupo 1), pra não ter que contar de figura a figura. A gente pega, é... a figura quinze (aponta) multiplica por dois e acrescenta por um. E também poderia, multiplica catorze por dois, começando da segunda figura e acrescentando os três primeiros palitos da figura um.

P – Muito bem... O último grupo, por favor.

Grupo 3

A – A gente... A figura 1, já estava montada lá. A figura quatro, a gente viu que não poderia ser a sequência (aponta para a linha das construções), porque que pedia figuras diferentes. Então a gente fez, primeiro fez a base e depois colocou em cima. Mesma coisa foi o quinto, começou com a base e depois foi pra cima. A figura oitava (aponta) como ela ficaria. Ficaria desse tipo (aponta).

Tabela: a gente usaria três, cinco, sete, nove e onze. A explicação, foi diferente dos outros sempre acrescentando dois palitos, em determinada ocasião. No quinto, a gente usou trinta palitos, que é a figura décima quinta, e o porquê foi que da mesma forma que a gente acrescentava dois palitos na figura anterior, foi acrescentando em determinada ocasião. Aí, diferente dos outros que multiplicaram a gente montou a figura (mostra uma figura desenhada numa folha de caderno) contou quantos palitos colocamos, deu trinta e um.

Após as apresentações dos grupos, a professora fala:

P – Gente, oh. Presta atenção. Eu gostei das três apresentações, tá? Vocês se esforçaram, vocês pensaram, vocês é... raciocinaram. Então, concluindo, eu não vou dar respostas completa do problema, mas é... uma introdução, né, de tudo o que vocês fizeram. O que é que vocês utilizaram na primeira construção? (começa a escrever no quadro). Primeira construção, vocês utilizaram quantos palitos?

A – Três.

P – Três palitos. Mas vocês fizeram na cartolina e construíram com três palitos, não foi? (escreveu: 1ª construção → 3 palitos). Segunda construção, cinco palitos. (escreve). Terceira construção, presta bem atenção nisso aqui.

A – Foi sete.

P – Sete palitos. Eu gostaria da participação de todos, tá? Pra ficar mais bonitinho, né? (Continua escrevendo e falando) Quarta construção.

Alunos – Nove palitos.

P – Muito bem. Tá vendo como fica mais bonito. E na quinta construção, ...

Alunos – Onze palitos.

P – Muito bem. Onze palitos. Vocês concordam que esses números (aponta) que a gente usou nessas construções, o número três, cinco, sete, nove, onze, tá seguindo uma sequência? Tá seguindo uma sequência numérica. Mas qual é o segredo dessa sequência? (silêncio) Pelo que a gente tá vendo aqui? A gente pode descobrir o número da próxima sequência?

A – Pode.

P – Pode. Qual é o número da próxima sequência?

A – Treze.

P – Por que treze?

A – Seria a sequência de onze mais um número par, ímpar.

Outro aluno,

A – Seria a sequência do número dois.

P – Seguindo a sequência, somando com o número dois. Então pode perceber que a partir desse segundo número (aponta para o 5 palitos), a gente tá adicionando, oh, tá repetindo o anterior(escreve 3 + 2) e somando com...

A – Dois.

P – Com dois. Aqui, pra dar cinco eu peguei o anterior e somei com dois. Pra dar sete, eu peguei o anterior e somei com...

A – Dois.

P – Dois. (Aponta para o nove) Peguei o anterior e somei com...

A – Dois.

P – Dois. E aqui, nove somei com dois (refere-se ao onze).

A professora pára de escrever e fala:

P – Esse número que eu tô somando, ele é um número fixo ou ele é um número que tá sempre mudando?

A – Tá somando dois.

P - O número que eu tô somando, esse número que eu tô somando à minha sequência, é um número fixo. Então a gente acabou de estudar uma Progressão Aritmética. O que é uma Progressão Aritmética? É uma sequência de números em que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior somado com um número fixo. E esse número fixo é a minha razão, a razão da Progressão Aritmética. Então aqui, esses números: três, cinco, sete, nove e onze, é uma Progressão Aritmética de razão quanto?

A – Dois.

P – Dois. De razão dois, que é um número fixo. Daí a gente descobre quais são os próximos números dessa sequência, né? Porque a gente já conhece a, a razão. Entenderam? Tudo o que vocês fizeram, tudo o que vocês construíram foi pra chegar numa Progressão Aritmética, que a gente chama de P.A. Nas próximas aulas a gente vai descobrir mais sobre P.A. O que é que ela tem mais pra nos dizer, tá? Aí é só começando. Tá bom, gente? Pronto. Por hoje é só.

A – Professora... (inaudível)

P – Depois a gente vai vendo isso. No decorrer do trabalho vocês vão descobrir fácil, fácil essa resposta, tá? É tudo uma descoberta. Né assim não.

A – Eu tô cansado de ficar curioso.

P – Eu gosto de deixar vocês curiosos.

Ri e termina a aula.

APÊNDICE D

Transcrição da 2ª sessão da Sequência Didática de P.A.

Primeira aula da 2ª sessão (duas aulas de 50 minutos cada uma)

A professora inicia a aula com a seguinte fala:

P - Oh, dando continuidade a nossa, a nossa sequência anterior, né, é... eu queria fazer a retomada do que a gente viu naquele, naquele primeiro momento. Do que a gente trabalhou em grupo, que foi proposto pra vocês na atividade. Vamos relembrar. Primeiro lugar: o que foi que a gente começou a ver, começou vendo nessa atividade.

Um aluno fala baixinho e a professora não entendendo, pergunta.

P – Oi?

Como ninguém responde, ela continua.

P - Eu acho que primeiro eu dei uma atividade pra vocês com um probleminha, né? Esse probleminha falou de um certo posto, que haveria uma multa pelo atraso e que essa multa, no primeiro dia do vencimento a multa seria R$ 38,00 e depois, a partir do segundo dia, seria acrescido R$ 5,00. Cada um de vocês recebeu essa, esse exercício. Na realidade foi uma atividade em grupo, né? Vocês resolveram em grupo...

A – Essa foi individual.

P – Ah, essa foi individual.

A – Em grupo foi o do palitinho.

P – Ah tá. Depois a gente apresentou uma atividade em grupo que foi pra, é ... sobre a construção de triângulos. Aí foi proposto pra vocês fazerem as construções da primeira, segunda e da terceira, até a quinta construção. Vocês apresentaram umas, as suas respostas. Eu gostei das apresentações. Por quê? Porque, houve outras respostas diferentes e houve maneiras de pensar diferente, chegando alguns ao mesmo resultado. Teve uns resultados que foram diferentes, mas teve construções que estavam corretas as construções, mas vocês resolveram de forma diferente, né? Foi muito produtivo. E depois que a gente viu tudo isso, qual foi a conclusão que a gente chegou? Eu mostrei pra vocês que aqueles números de palitos ia sempre aumentando e aquele número que aumentava, era um número fixo, era um número que não mudava. Eu chamei isso de quê? Alguém lembra?

A – De P.A.

P – De P.A. O que era uma P.A.?

A – Progressão Aritmética.

P – Progressão Aritmética, né? Essa Progressão Aritmética é que começava com uma sequência, ...

Algumas alunas chamam a professora e perguntam se podem entrar. Ela autoriza a entrada. Depois continua:

P – E essa sequência, o que é que a gente observou nessa sequência? Que era uma Progressão Geo... Aritmética, por quê? Cada termo, a partir do segundo era igual ao termo anterior somado a um número fixo, que a gente chamou esse número de quê? (silêncio) Alguém sabe? Por exemplo: qual era o número fixo que tava sempre se repetindo naquelas construções que vocês fizeram?

A – Dois.

P – Era o número dois. Eu chamei esse número dois de quê? (silêncio)

P – Da minha razão da Progressão Aritmética, né? Então, a gente sabe que uma Progressão Aritmética é uma sequência, né? E cada número a partir do segundo termo é igual ao anterior somado mais dois, que é a razão. Foi isso que a gente viu. Então, eu tenho outra atividade pra vocês, tá? Essa atividade a gente vai ver o resultado dela no final assim como agente viu o resultado das primeiras atividades. Oh, essa segunda atividade eu vou querer que vocês se dividam em grupos, tá? É. Dessa vez vocês não vão usar cartolina não. Vocês vão responder essa atividade na folhinha, mesmo e depois vocês vão apresentar, tá? Do mesmo jeito que a gente fez na primeira.

Risos.

P – Mas vai ser mais rápido do que a primeira vez.

Os grupos se organizam. Começam a ler a atividade da 2ª sessão. A professora fala:

P – Olhe, essas questões que estão aí, vocês vão calcular mais rápido. Pela noção que vocês já têm de Progressão Aritmética.

A professora anda pela sala chegando próxima a cada grupo. Depois de alguns minutos ela se aproxima de um grupo composto por alunos que haviam faltado à primeira sessão e fala:

P – Você vai observar essas construções daqui e vai responder essa questão pelo que a gente já viu.

E sai para outro grupo.

Em um dos grupos uma aluna fala para as demais:

A – Me dá aí. Né assim não. O número de quadrados, vê. Sete, oito, nove, dez. Onze, doze, treze. Né?

A outra aluna pergunta:

A – Por quê?

A – Porque tá acrescentando três palitos em cada ordem. Em cada ordem. Aqui foi dois quadrados, sete palitos. Aqui foi três quadrados, dez palitos. Ou seja, aqui oh, um, dois, três. Acrescentou três palitos. Foi não? Não foi não?

Outra aluna do grupo fala:

A – É, tá certo.

A aluna reforça:

A – Aqui tem sete palitos. E aqui tem dez palitos. (risos) Dez, onze, doze, treze. Catorze, quinze, dezesseis. Dezessete, dezoito, dezenove.

Elas lêem a segunda pergunta e uma das alunas fala:

A – Tá que eu sei. Pergunta a ela.

A outra fala:

A – Ela não vai responder, não.

As alunas que não estavam na aula anterior dizem:

A – Mas tu não estavas na aula, A...?

Chamam a professora.

A – Professora, o segundo como é?

P – Eu acabei de explicar. Você não tava nas outras aulas não? Progressão Aritmética é uma sequência em que o segundo termo menos o primeiro termo é a razão.

A outra aluna do grupo fala:

A – Entendi.

P – Entendeu mesmo?

A – Entendi. Mas pode explicar mais uma vez.

P – Progressão Aritmética é uma sequência de números, em que o segundo termo é o primeiro mais a razão. A razão é quem? A razão é aquele número que vai sempre aumentando, aumentando, vai sempre somando à sua sequência. Por exemplo: Dois, quatro, seis, oito, dez. (escreve) É uma Progressão Aritmética. Cada termo a partir do segundo, é o termo mais um número fixo. Somando: dois mais dois, quatro.

A professora deixa os alunos fazendo a atividade e começa a fazer a chamada. Um aluno vai até a professora e pergunta algo sobre a atividade. Ela fala:

P – Essa aqui é a primeira construção, essa a segunda, essa a terceira. E você tem que imaginar a quarta e a quinta. Daí você conta a de número setenta e dois.

O aluno fala algo baixinho e a professora diz:

P – Se é esse seu raciocínio?

Um aluno que havia faltado às aulas anteriores começa a ler no livro didático sobre Progressão Aritmética.

Em um dos grupos um aluno fala aos demais:

A – A sexta figura tem vinte e dois. Aí se eu multiplicar seis por três, dá doze, dezoito no caso mais quatro dá vinte e dois. Tá entendendo? Sempre, sempre o número da figura mais quatro vai dar número de palitos da figura que eu quero, tá ligado? Sempre somando com quatro. Independente da sequência, a sequência...

O outro aluno questiona o raciocínio do colega e fala:

A – Eu não tô entendendo que se aqui é vinte e dois... Porque veja só, aqui vai ser da sexta figura, né? Se isso daqui é da sexta figura,

A – Sim.

A – Eu não vou tirar esse dezoito? Pegar a sexta figura fazer vezes três,

A – Né dezoito, seis vezes três? Aí pega o resultado, da multiplicação seis vezes três, que deu dezoito,

A – Então soma mais quatro palitos da primeira figura?

Caio – Sempre soma com quatro. Sempre quatro. Independente.

Outro aluno fala:

A – Aqui vai ser mais sete.

Caio - Ou seja, eu vou arriscar meu palpite: setenta e dois, multiplicado por três dá duzentos e dezesseis.

A – Duzentos e vinte.

Caio – Porque aqui no caso é com mais... A resposta vai ser duzentos e vinte.

Outro aluno:

A – Mais três?

Caio - Eu acrescentava quatro. A figura setenta e dois vai ter duzentos e vinte palitos.

A – A sétima vezes três, dá vinte um.

Caio – Mais quatro, sempre mais quatro. Essa foi a única explicação que eu encontrei.

Em outro grupo uma das alunas tenta convencer a colega e como a outra olha para a professora, fala:

A – Eles estão pensando que aqui começou do quatro. Aqui começou do sete. Você tem que analisar isso, também. De três em três.

Outra aluna do grupo não se convence e olha para a professora. Sua colega então fala:

A – Bora na onda da gente. Tu não confia no teu taco não, é?

Ela diz:

A – Se tiver errado...

Continuam fazendo a atividade e então uma aluna de outro grupo chama:

A – Professora.

Faz uma pergunta e a professora responde rapidamente. O grupo de Weidja entrega.

O grupo lê sobre escrever uma expressão matemática que permita calcular o número de palitos, e chamam a professora.

A – Esse aqui tá muito difícil.

P - Se você tem uma expressão que explique a quantidade de palitos. No lugar do número quadrados coloca uma letra.

A – Entendeu?

A outra aluna fala:

A – X.

A – x é sempre o resultado. X é duzentos e vinte.

A – P é duzentos e vinte.

A – E eu sei quantos quadrados ficam. Vê a quantidade de quadrados até chegar a duzentos e vinte?

A – Um quadrado tem quatro.

A – É.

A – O outro quadrado tem três.

A – É.

A – Pedaço do outro quadrado.

A – Ih.

Risos.

A – Cada quadrado tem quatro lados. Só que eles não são assim? (mostra a mão no sentido horizontal). Só que só vai ter três porque a listra do outro quadrado não já tá? Então vai ser setenta e ...

Risos

A – Meu Deus do céu, tu não sabes nem o que estás falando.

A professora então fala:

P – E aí terminaram?

Uma aluna responde:

A – Fez o que sabia.

Um grupo chama e uma das alunas fala:

A – Dez palitos fez três quadrados, duzentos e vinte faz quantos quadrados?

P – Como é?

A – Dez palitos fez três quadrados, duzentos e vinte fez setenta e quantos quadrados?

P – Eu quero uma expressão que explique isso. E não quantos quadrados tem. Como se fosse uma formulazinha, uma equação. Você disse que duzentos e vinte é ... (inaudível)... como é que você encontraria uma expressão. O número de palitos é P o número de quadrados é n. N vai ser quantos palitos de P? Como foi que você chegou a duzentos e vinte palitos? Você só chegou somando?

A – Foi.

P – Então explique com suas palavras uma maneira de calcular, explique como foi que você desenvolveu esse cálculo aqui.

A – Então aqui, no caso...

P – Não, porque você não escreveu nenhuma expressão. Você apenas somou.

Os alunos começam a entregar. Depois de uns minutos a professora fala:

P – Gente, próxima aula, é na sexta-feira, vai ser a comemoração das mães. Segunda-feira começamos as apresentações.

Segunda parte da 2ª sessão (uma aula de 50 minutos)

P – Bem eu gostaria de dar boa tarde pra alguém que está de costa pra mim.

A – Desculpe aí professora.

P - Olha, na última aula, eu passei uma atividade pra vocês. Pedi pra que vocês se reunissem, e respondessem essa atividade e depois que vocês respondessem, vocês irão apresentar aquilo que vocês conseguiram fazer. Teve gente que faltou a aula passada e dei a oportunidade dessas pessoas que faltaram se integrar aos grupos que já estavam formados e dei ..., disse que era só dez minutos. Mas foi aí, acho que mais de dez minutos, pra vocês reverem o que vocês responderam e se tinha alguma coisa a acrescentar, pra apresentar agora, né. Então vamos lá. Eu gostaria de ouvir as apresentações. Por favor, quem é o primeiro grupo?

Um grupo vai a frente e uma das alunas inicia.

Grupo 1

A – Primeiro, né: *Supondo que seja mantido o padrão apresentado na figura, complete a sequência numérica referente à quantidade de palitos usada nas cinco primeiras construções.*

Aí, sempre assim na primeira construção foram usados sete palitos. Na segunda, dez, na terceira treze, aí foi aumentando, o anterior mais três. Muito fácil.

Vamos o segundo, aí diz assim*: a sequência numérica que você escreveu é uma Progressão Aritmética?* Sim. Sim ou não, por quê? Eu botei sim, porque o três é mantido na sequência. Sempre o número anterior é acrescentado três, e tal...

E o terceiro é assim: *Mantendo o padrão apresentado na figura, determine o número de palitos utilizados é... na setenta e duas (72ª) construções e escreva como chegou ao resultado*.

Assim, pra gente não ficar botando três na anterior que ia ficar muito complicado, a gente multiplicou setenta e dois por três, que é a razão, aí o resultado, deu duzentos e dezesseis mais um, que deu duzentos e dezessete. Se vocês fizerem, assim o anterior mais três, vocês vão ver, vai dar duzentos e dezessete.

E o quarto: e*screva uma expressão matemática que indique o número* ***P*** *de palitos em função de números* ***n*** *de quadrados.*

A aluna vai escrever no quadro e fala:

A - P de palitos, e n... Aí botou assim, igualzinho aquela que eu fiz. N quadrados multiplicado por três, ...

Continua escrevendo em silêncio e ao terminar fala:

A - Essa daqui foi a fórmula que eu cheguei. Que três n mais um é igual a P. (3n + 1 = P) Você var botar aqui no lugar do n, o número de quadrados, você multiplicando três, o número de quadrados vezes três mais um é sempre o número de quadrados.

E o quinto é: *explique com suas palavras uma maneira que você pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos em diferentes construções imaginadas.*

Multiplicando normalmente. Multiplicando o número de construções, por três somando com um, sempre vai dar o número de palitos. E uma forma, mais ou menos que a gente conseguiu chegar, pra que ... qualquer uma, usando qualquer tipo de... (barulho e aluna pára).

Usando qualquer tipo de... de... como é que eu vou dizer? De forma, de... coisa

Aluno de outro grupo – Construção imaginada.

A - Pois é. Aí você chega aqui. N + x, N multiplicado por x mais um é igual a P.

(A aluna escreve no quadro em silêncio e depois fala):

A - Se você usar, assim, por exemplo, usar, eu usei um *octágono, era* uma forma, uma coisa...

Aluno de outro grupo – Oito.

A - De oito lados, eu botei aqui o n que é o número de construções, você botando o número de construções, aqui. A primeira construção multiplicado por oito mais um é sempre o número de palitos. Mais um sempre o número de palitos, sempre, sempre, sempre, você colocando o número de construções multiplicado pela razão mais um é sempre o número de palitos.

Acabou? Tem alguma pergunta?

P – Eu.

A – Sim?

P - Você tinha me falado antes que você usou um raciocínio pra chegar a essa fórmula aí, lhe parecia familiar. Não foi? Você disse...Essa fórmula você usou aí embaixo: 3n + 1 = P. Você disse que teve alguma ideia pra chegar a isso aí de algum assunto que você estudou.

A – Agora eu não lembro, professora. Eu posso ter dito a senhora, mas eu não lembro agora. Eu posso depois lembrar, mas agora...

P – Tá bom, depois se você se lembrar você me fala. Vamos lá?

A – É isso aí, alguém tem mais alguma pergunta?

Palmas...

P – Segundo grupo, por favor... Vamos? Não, bora.

A – Faz isso não professora.

P - Por favor, vocês só vão apresentar o que vocês construíram, somente.

Alguns alunos do grupo levantam e outros ficam sentados.

P – Bora, gente, por favor. As pessoas que estavam com ele no grupo, vamos.

Os outros alunos do grupo levantam.

P - Quer apagar o quadro?

A – A gente não vai usar o quadro.

P – Só se usar, se usar você usa o “piloto”, tá?

Grupo 2

A – O primeiro...

P – Vocês aí prestem atenção.

A - O primeiro é só para completar a sequência, e aí ele dá o exemplo o primeiro exemplo diz que tem sete, no segundo tem dez, ou seja, vai aumentar de cada um pra outro, três. Aí o próximo deu treze, o outro dezesseis e o outro dezenove. E ao segundo quesito, a pergunta era se era uma progressão aritmética. Sim, porque obedece a uma sequência. E no caso a sequência três. O terceiro é... mantendo o padrão da figura, determine o número de palitos utilizados na septuagésima segunda construção e escreva como chegou ao resultado. O resultado da gente deu diferente, deu duzentos e dezenove. A gente multiplicou o número da figura e ... e multiplicando o número da figura pelo P.A. que somou com três que deu esse resultado. O quarto eu não fiz, a gente não fez. O quinto, é... era pra explicar com nossas palavras uma maneira que você pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos em diferentes construções imaginadas. Eu, pra ser sincero não consegui também entender bem isso aqui. E o sexto, era pra escrever uma fórmula que permitisse calcular a quantidade de palitos para qualquer construção imaginada. Pegasse figura anterior, mais o P.A., um exemplo é da quarta figura: que tem treze palitos somando com três, do P.A. que vai dar um número não exato da figura...

P – Veja só, essa terceira questão que você fez aí, você poderia só escrever que foi que você calculou aí pra dar duzentos e dezenove, só o cálculo que você fez?(silêncio) Na terceira questão.

O aluno escreve no quadro, em silêncio.

P – Setenta e dois é?

A – O número da figura.

P – Tá. Vezes três, que é a razão, né? Depois no final você somou com três, foi?

A – Foi. Foi assim que eu fiz, tá meio doido aí professora, não entendi direito...

P – Esse foi o raciocínio?

A – Foi.

P – Tá bom. Palmas gente.

P – Quem é o próximo? Quem é o próximo, por favor?

A – É a mesma coisa deles.

P – Ou seja, você fez como eles?

A – Fizemos juntos, eles fizeram no grupo deles e a gente fez separado. Calculamos junto. Aí deu a mesma coisa.

A professora deixa de olhar para o grupo 3 e fala:

P – Quem mais fez? Esse grupo daqui, por favor. (aponta) Bora, bora, vocês fizeram uma coisa interessante e eu gostaria que vocês mostrassem aquele cálculo.

A – Oh, meu Deus.

Grupo 4 –

A - O primeiro foi o mesmo esquema de todos os outros grupos.

P – Qual foi o esquema?

A - Somando de três em três até encontrar o resultado. No segundo foi, a pergunta foi com respeito se a sequência numérica era uma progressão aritmética. A gente respondeu que sim, porque a sequência dos números foram somadas com a razão. O terceiro, (lê): *mantendo o padrão apresentado na figura determine o número de palitos utilizados* nesse número aqui, que eu não sei professora, *e escreva como chegou ao resultado.* Nosso resultado deu 220 palitos.

P – Muito bem.

Outra aluna do grupo 3, escreve no quadro e fala:

A – Três mais três, mais três, mais três... (risos).

A – Porque a gente somou de três em três, professora. A gente não multiplicou, a gente não fez nada.

A – A gente só somou de três mais três, mais três, mais três...

P – Mas vocês somaram três mais três, partindo de quê, do começo era o número três, é?

A – Não, a partir do sete.

P – Aí você...

A – Por isso que muitos deles deu resultado diferente. Porque começaram a partir do três. A gente começou a partir do primeiro resultado. Do sete, dez, treze, dezesseis.

P – Aí vocês fizeram até a septuagésima segunda?

A – A gente calculou no papelzinho, três mais três, mais três mais três.

A – Foi. Aí chegou ao resultado duzentos e vinte.

P – Tá. Ótimo.

(risos)

A – O quarto, no caso a gente também não usou nenhuma fórmula matemática, expressão. E o quinto: *explique com suas palavras uma maneira que você pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos em diferentes construções imaginadas.* A resposta é o seguinte: da mesma forma que fez o cálculo da primeira construção, somando de três em três, ou seja, a gente também não respondeu.

A – Nós fizemos da mesma forma: três mais três, mais três, mais três.

P – Certo.

A – Alguma pergunta, professora?

P – Não. Só isso? Palmas, gente.

Palmas...

P – Por favor, o único representante (aponta para um aluno do grupo 4, que os demais componentes do grupo faltaram e está sozinho)

A – Sozinho, professora?

P – É. Só faz o que você fez.

Barulho...

P – Só responde.

Barulho...

P – Olhe preste atenção. Como é o teu nome?

A – Éder.

P – Éder. Você fez alguma coisa diferente dos outros grupos?

A – Não.

Outra aluna fala:

A – Qual vai ser o resultado da quantidade de palitos.

P – A gente só gostaria de saber qual foi sua quantidade de palitos.

A – É do terceiro?

P – É do terceiro.

A – Deu duzentos e dezesseis.

P – Duzentos e dezesseis. Você lembra como você fez?

A – Eu não. Setenta e dois ao quadrado vezes três que deu igual a duzentos e dezesseis palitos.

P – Setenta e dois ao quadrado.

A – Ao quadrado vezes três.

P – Setenta e dois ao quadrado? Dá isso?

A – Não. Setenta e dois ao quadrado? (ri)

P – Tem mais algum grupo?

A – Tem.

P – Quem é?

A – Nós aqui.

Grupo 5

A – O primeiro: sete, dez, treze, dezesseis e dezenove. Acrescentando três. O segundo era uma razão aritmética, ou uma progressão aritmética, porque sempre a mesma razão, sempre seria a mesma razão, três números como base, sempre ia acrescentar à construção. O número base, três. O número de palitos foi duzentos e dezessete, sempre ia acrescentando três à mesma construção que a gente calculou. Setenta e um vezes três, que no caso era setenta e dois que a construção queria, acrescentando quatro, porque a primeira construção foi de sete palitos. Aí deu duzentos e dezessete. Para a fórmula que a gente construiu, a quarta questão, foi P o número de palitos e n o número...

Professora faz sinal entregando o lápis para o aluno escrever no quadro.

P – Pode apagar, pode apagar tudo aí.

O aluno escreve em silêncio P = N.3, e depois fala:

A – P como o número de palitos, N como número de construções, vezes três, que ia dar o número de palitos exatos que queria. Essa foi a quarta. O quinto foi: *explique com suas palavras uma maneira que pudesse realizar o cálculo da quantidade de palitos, de diferentes construções imaginadas.* Então, dependendo da quantidade de construções que queria e dos palitos era só subtrair pela quantidade de construção. A quantidade de palitos pela quantidade de construção, ia chegar ao número imaginado de palitos. Aí, o sexto é: *escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de palitos para* *qualquer construção imaginada.* Era só pegar a quantidade de palitos e multiplicar pelo valor dos quadrados, como a gente fez.

Escreve no quadro e vai falando:

A – Q, como construção, vezes três, igual ao número de palitos (Q.3 = P)

P – Pronto?

Aluno faz sinal, com a cabeça, que sim.

P – palmas gente, por favor.

Ao término das apresentações, a professora levanta e fala:

P – Olhe, eu acho que vocês estão ansiosos para saber, na realidade, quantos palitos foram utilizados nessa construção aí do terceiro, né? Oh, primeiro o que eu gostei de todas as apresentações foi porque vocês conseguiram identificar uma Progressão Aritmética. Todos os grupos, sem exceção, afirmaram que era uma sequência e que essa sequência era de razão três. Eu acho que o objetivo maior aí foi alcançado, porque vocês identificaram a Progressão, a sequência e a razão, né. Porque isso aí foi o que a gente trabalhou nessas últimas aulas. Agora, é...essa primeira questão que pedia pra vocês fazerem a sequência, aqui como todo grupo aprendeu o que era a sequência e o que era a progressão, todo mundo conseguiu fazer. O segundo, também responderam que é uma progressão aritmética. O terceiro, só foi um grupo que conseguiu chegar a resposta. Foi o grupo das meninas (aponta para o grupo 3).

A – Eu não disse.

P – Conseguiu chegar a duzentos e vinte palitos. A gente vai ver porque, tá? O quarto, era pra vocês...presta atenção, presta atenção!

Alunas do grupo 3 ficam eufóricas e a professora se aproxima do grupo 3 e fala:

P – Vocês conseguiram chegar à resposta, mas vocês sofreram um pouquinho pra chegar nessa resposta.

A – Mas chegou.

P – Chegou, mas sofreu. Será que se eu pedisse a você, é...na construção número seiscentos?

A – A gente pegava um caderno pequenininho e saía...

A - Chegava lá.

P – E se eu pedisse a construção de número mil e quinhentos?

A – A gente sairia botando: um, dois, três, quatro...

P – Não. Vocês não iriam conseguir fazer.

A – Professora...

P – Vocês perderam muito tempo somando...

A – Mas chegamos certo.

P – Chegaram ao resultado certo, mas aí é que tá o mistério da questão que a gente vai desvendar hoje.

Um aluno do grupo 2 fala:

A – É o a_1 multiplicando três e acrescentando quatro.

P - Vamos ver.

Outro aluno do grupo 5 fala:

A – Mesmo assim dá duzentos e dezessete.

Outro aluno do grupo 2, fala:

A – Setenta e dois vezes três, dá duzentos e dezesseis, mais quatro, dá duzentos e vinte.

O aluno do grupo 2 que falou inicialmente, diz:

A – Tem que acrescentar quatro. Multiplicado o número da figura vezes três, acrescenta quatro.

P- Sempre acrescentar quatro? Será que é assim?

Aluno do grupo 5:

A – se a razão é três como acrescentar quatro?

A – eu não sei, mas isso aí vai dar certo.

P - Bom, preste atenção...O quarto você iria criar uma fórmula, uma expressão matemática, como Weidja criou uma expressão que não existe, uma expressão única, tá e ela criou uma expressão, e explicou pra mim a quantidade de palitos.

Um aluno interrompe.

P – O que deu pra explicar essa expressão. Presta atenção. E o sexto quesito, é justamente o que eu quero que vocês aprendam hoje, tá? Que é escrever a fórmula que permite calcular a quantidade de palitos pra qualquer construção. Qualquer número de construção. Então presta atenção, aqui.

Apaga o quadro e fala:

P – Como foi a sequência que vocês chegaram e foi apresentado no exercício pra vocês? Expliquem pra mim a sequência. Começou com que número?

A – Sete.

P – Sete.

A – Dez.

P – Dez.

A – Treze.

P – Treze.

A - Dezesseis, dezenove.

P – Dezesseis, dezenove, assim por diante, certo? Daí a gente conseguiu tirar a razão. A razão que eu vou representar pela letra r. Razão a gente descobriu pegando o segundo termo, né, subtraindo do primeiro termo, a gente descobriu que a razão era quanto?

A - Três.

P – Três. Então vejam só. Eu vou dar nome “aos bois” como se diz a história. O primeiro termo foi quem?

A – Sete.

P – Sete. Então eu vou chamar o primeiro termo de a_1 , tá? A_1 é sete. Se o meu primeiro termo... Presta atenção, por favor. Eu queria a atenção de todo muno ali. Deixa eu fechar aqui. Licença. (alguém chega à porta e interrompe a aula). A_2 , sim... Se a_1 é o primeiro termo, o segundo termo vai ser o quê? Se o primeiro termo é o a_1 quem é que vai ser o segundo termo?

A – a_2.

P - a_2 é igual ao primeiro termo mais quem? (escreve)

A – Três.

P – Mas esse três eu chamei de quem?

A – R.

P – De R. Estão entendendo até agora? O primeiro termo eu chamei de sete, é a_1. O segundo termo a_2, foi o primeiro termo mais...

A – R.

P - R, que é a razão. Então, oh, o segundo termo (fala e escreve), a_1 é sete e a razão é três. Quem é o segundo termo?

(escreve) $a_2 = a_1 + r$

$a_2 = 7 + 3$

$a_2 = 10$

A – Dez.

P – Quem vai ser o terceiro termo?

A – A_2 mais r.

P – Não. Vamos sempre fixar o a_1, tá? Vai ser a_1 mais quem, e agora?

A – R^2.

P – R^2 ?

A – 2R.

P – 2R. Esse é o raciocínio certo. Então o a_3 ... Quem é o primeiro termo?

A – Sete.

P - ... mais duas vezes a razão. Quem é a razão?

A – Três.

P – a_3 é quanto? Sete mais...

A – seis.

Professora escreve $a_3 = 7 + 2.3$ e fala:

P – Sete mais seis. Estão percebendo uma lógica? O a_4 , quem seria o a_4?

A – $a_{1...}$

P – $A_{1,}$ a gente tá sempre trabalhando com $a_{1,}$ certo? A_1 mais quem?

A – Mais 3R.

P – Mais 3R. Tão percebendo aqui? Olha, olha o padrão.

A professora escreve e vai falando.

$A_4 = a_1 + 3R$

$A_4 = 7 + 3.3$

$A_4 = 7 + 9$

$A_4 = 16$

P - A_2 foi a_1 mais a razão. Mais uma vez a razão. A_3 foi a_1 mais duas vezes a razão. A_4 , a_1 mais três vezes a razão. Vamos ver quanto é que dá? A_1 mais quanto? Três vezes três. Quem é o a_1?

A – Sete.

P – Sete.

Escreve em silêncio.

A – Ah, professora...

P – Oi.

A - No caso, então seria assim: a_{72} que é $a_{1,}$ vai ser igual a a_1 + 71R?

P – Você chegou a conclusão.

P – Então como é que a gente...

Chegam alunos de outra sala e a professora diz:

P – Daqui a pouco eu atendo vocês.

Volta a falar com a turma:

P – Olha, seguindo essa sequência aqui. Eu não só quero que Weidja chegue a essa conclusão. Eu quero que vocês todos, viu Aléxia consigam me entender, entender a lógica dessa sequência, tá? Se a_2 é o primeiro termo mais a razão, a_3 que é o terceiro termo, é o primeiro termo mais duas vezes a razão. a_4 é o primeiro termo mais três vezes a razão. Se eu pedir pra vocês calcular o número setenta e dois (escreve), vai ser o primeiro termo mais quem?

A – Setenta e um, vezes a razão.

P – Setenta e um, vezes a razão. Não é assim que a gente tá fazendo? Então a gente resolvendo, o primeiro temo é sete. Mais setenta e um vezes a razão. (escreve) Aí a gente vai chegar a ... duzentos e vinte. O resultado que as meninas chegaram com tanto sacrifício. Mas chegaram.

Risos.

P – Mas veja, aqui está a prova do crime. (ri) Deixa eu mostrar. Elas somaram, tá? Do primeiro termo, sete de três em três, até chegar a...É aqui, a construção de número setenta e dois. Você Willa entendeu como foi que eu fiz aqui.

A – Agora ficou mais fácil, professora.

P – Agora, oh, a partir daqui a gente pode calcular uma fórmula pra gente calcular qualquer número de termos, tá? Então vamos escolher um número, oh... Que letra, ou que representação você daria pra um número que você não conhece?

A – x.

P – x. Ah, mas vamos trabalhar com n. Por que n é um número que a gente não conhece. Então eu quero descobrir um termo, uma fórmula que descubra, que permita a gente calcular qualquer número de termos. Se n é o meu número, no lugar desse setenta e dois, eu vou pra essa fórmula aqui (aponta).

Descarregou a bateria.

P – Então vamos lá. Olhando isso que a gente fez tá. Aqui, oh. Eu queria calcular o segundo termo, o terceiro termo, o quarto e aqui o termo de número setenta e dois. Agora eu vou calcular um termo, qualquer termo, eu substituí essa letra por n. N termos. É um termo que eu não sei. Eu posso usar qualquer um termo. Então eu usei a_n . Como a gente sempre tava usando o primeiro termo, então eu repeti o primeiro termo. Mas agora eu quero uma fórmula pra substituir esses números. Por que que será que aqui foi duas vezes a razão, aqui foi três vezes a razão, aqui foi setenta e um vezes a razão? Por que esse número...

A – Seria o número de construção?

P – Sim, mas o número de construção aqui seria setenta e dois. Por que setenta e um?

A – Porque foi menos a primeira.

P – Então é menos um.

A – Não, é menos a_1.

P – Menos um.

A – Menos a_1, professora. Porque, olha lá, olha lá. Menos a_1 porque setenta e um mais setenta e dois...

Outro aluno fala:

A – Porque a_1 já tá contando.

P – A_1 eu tô contando com ele. Ele já tá fora. Agora eu vou somar...

A – Seria menos um.

P – Seria menos um, por quê? Aqui, oh. A construção de número três, eu tô usando duas vezes a razão. Construção de número quatro, três vezes a razão, né? Construção de número setenta e dois, setenta e um, vezes a razão. Então aqui, se aqui é n, que número eu vou colocar aqui? (aponta para $a_n = a_1 +$)

A – Tem que ser número, é?

P – Não. Eu to usando n, que é a letra.

A – Então é n. Só n.

P – Gente, por favor. Usem a lógica, pelo amor de Deus.

A – Como é professora, eu não entendi não. Como é?

P – Olhe, se eu to usando aqui, né o terceiro termo?

A – É.

P – Aqui é a_1 mais duas vezes a razão.

A – A razão.

P – Duas vezes. Aqui a_4 , é três vezes a razão. Aqui no a_{72} é setenta e um, vezes a razão. O que é que tá acontecendo com esse número?

A – Diminuindo um.

P – Diminuindo um. Diminuindo um de quem?

A – Do número do termo.

P – Não é? Então se o número do termo é n, vai ficar como aqui?

A – N menos um.

P – Alguém falou aí. Que coisa boa.

A – N menos um.

P – N menos um.

A – Eu sabia.

P – Sabia, mas não queria dizer. Então, (volta escrever) mais n menos um, vezes a razão. Construímos agora, a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética. [escreve no quadro $a_n = a_1 + (n – 1) . r$].

A – Professora, essa fórmula já existe?

P – Existe.

A – E a gente quebrando a cabeça aqui.

P - Quebraram tanto a cabeça e agora vai ficar bem simples. Por que qualquer número, a gente vai colocar, oh,...

A – Ai meu Deus do céu.

P - Eu queria calcular a de número setenta e dois, tá? Então a, o n é o número que você quer achar.

A – Professora.

P – Oi.

A – Por que a da gente deu dezesseis?

P – Porque vocês não usaram nesse raciocínio.

A – Mas, tipo assim, a construção seria setenta e dois, multiplicado por três

P – Você poderia acertar uma construção, mas você não ia acertar todas.

A – Por quê?

P – Porque você não usou o raciocínio correto. Que é que você quer que eu lhe diga mais?

A – É isso aí mesmo.

P – Oh, é ... Já que a gente já conseguiu resolver o nosso problema, vocês lembram de uma questão que eu dei pra vocês... Aquela questão que dizia “um contribuinte esqueceu de pagar o imposto e que a multa era de R$ 38,00 e a cada dia vai acrescentando cinco”. Aí ele queria saber o primeiro dia, né? O segundo dia, o terceiro e o quarto. Será que com essa fórmula, vocês agora conseguem fazer o a... Ou seja,

A – O n dias.

P – E o dezoito? Eu vou entregar pra ver se vocês, tá? Depois da explicação você vai fazer agora, tá?

O aluno que perguntou sobre a existência da fórmula, fala.

A – Era fácil, fácil...

A professora pega o problema P_1, e fala:

P – por que você vai ver como você fez antes e como é que vai fazer agora sabendo daquela fórmula do termo geral. Vocês podem fazer atrás o depois, tá? Agora, por favor, atrás, vocês colocassem assim: segundo momento. Tá? pra eu poder distinguir.

Começa a chamar os alunos e distribui o $P_{1.}$

Após esse momento, a professora fala:

P – Eu acho que eu conheço vocês, tá? Presta atenção. Deixa eu repetir isso aqui. Vai ajudar a responder isso aí, tá? Pra quem não prestou atenção como deveria, né? Olhe, eu tenho aqui uma sequência, tá? Sete, dez, treze, dezesseis, dezenove. Nessa sequência, eu tenho meu primeiro termo. Quem é o meu primeiro termo?

A – Sete.

P- Eu vou chamar o meu primeiro termo de a_1. O segundo termo de...

A – a_2.

P – a_2. O terceiro termo de a_3, $a_{4,}$ a_5 e assim por diante. Se for n termos eu vou chamar de a?

A – n.

P - a_n. Tá? Então oh, eu descobri pela definição de Progressão Aritmética, que a razão é o segundo termo, ou seja, o termo anterior (corrige), é o termo menos o termo anterior. Por exemplo: 10 – 7 que é...

A – Três.

P – Três. Se você pegar cada termo e você subtrair o anterior, você vai achar a mesma razão. Então, o que é importante pra eu calcular qualquer número de termos? É eu achar meu primeiro termo, que é o a_1, e a minha razão, tá? O meu primeiro termo é quem? Eu tenho a_1, que é...

A – Sete.

P – Sete. E minha razão que é três. Como foi que eu descobri a razão? Subtraindo do segundo termo o primeiro termo. Agora, eu quero descobrir o termo a_4. Vamos supor que a_4 não tivesse aqui. Então oh, a gente aprendeu que pra eu calcular o a_4,eu vou precisar do meu primeiro termo mais três vezes a...

A – Razão.

P – Razão. Meu primeiro termo é quem? Sete. Aí eu vou botar sete mais três vezes a razão que eu achei, que é três. Aí é só eu fazer, oh: sete, três vezes três, nove; sete mais nove, dezesseis. Se eu quiser calcular o termo de número setenta e dois? Eu vou botar o primeiro termo mais setenta e um, vezes a razão. Então a_{72} é o primeiro termo, sete, mais setenta e um vezes três. Resolvendo dá duzentos e vinte. Agora, só pra reforçar mais ainda, vamos supor que eu quisesse procurar o termo de número cem. Como é que eu vou fazer?

A – a_1.

P – a_1 mais...

A – Noventa e nove r.

P – Noventa e nove vezes três. A_{100} (escreve e fala) iria ser sete mais noventa e nove vezes a razão, que é três. Calculando iria achar o a_{100}, tá? Isso você pode calcular ...

Alguém chega à porta e chama um aluno, interrompendo o raciocínio da professora. Ela continua:

P - ...por essa fórmula do termo geral. Essa fórmula, do termo geral, é essa aqui. (aponta para $a_{100} = a_1 + 99r$) Sendo aqui eu tirei o termo de número cem, e aqui pra qualquer termo, tá? Eu uso sempre a_1 mais o número de termos menos um, vezes a razão. Tá? Aí na questão de vocês, tá procurando o termo de número dezoito, né? Baseado nisso que vocês viram, no que você aprendeu, você vai calcular.

A – Eu já fiz, já.

P – Já fez?

A – Deu a mesma coisa.

P – Sim ele quer o termo em n, que vocês não conseguiram fazer, fizeram?

A – É igualzinho aquilo ali. (aponta para a fórmula do termo geral da P.A.)

Um aluno entrega e a professora questiona:

P – Quer dizer que você não muda nada no primeiro, segundo, terceiro e quarto termo?

A – Eu acho que não.

P – Se você vê, gente preste atenção, se você vê na resposta anterior, você errou ao calcular o segundo termo, o terceiro termo, você vai e conserta no segundo momento, porque você já sabe fazer o certo.

Os alunos refazem e entregam P_1 com o segundo momento.

A professora recomenda:

P – Olhe, quem faltou e está fazendo a primeira vez, bote: é... perdi o primeiro momento. Tá? Porque aí fica fácil da gente ... Todo mundo que me entregou, fez, tava no primeiro momento.

Os alunos vão fazendo e entregando. A professora fica de pé esperando.

P – Alguém ainda tá com isso aqui?(mostra a folha com $P_{1)}$.

Após todos os alunos entregarem P_1, a professora fala:

P – Gente presta atenção, presta atenção. Como vocês foram muito bem em todas as atividades, eu queria passar uma outra.

Barulho dos alunos.

P – Sendo que é bem rápido, tá? Então é com isso a gente fecha a, a nossa sequência, tá? Então, tente fazer isso aqui pra ver se vocês aprenderam? É pequenininho.

A – Ela elogia depois dá o golpe.

A – Ah, sei não.

P – Pensa direitinho.

A – Que é isso, professora?

P – É a mesma coisa.

Os alunos começam a responder e a debater entre si. A professora interrompe e diz:

P – Olha, agora a gente já sabe quem é o primeiro, quem é a razão, com isso aí a gente faz rápido, rápido. Leia direitinho que você vai identificar.

Uma aluna (Wedja), entrega. A professora fala:

P – Já?

Lê e diz:

P – Ela já fez.

Um aluno olha pra Alice e pergunta:

A – Deu cinqüenta e oito?

Alice – Foi.

A – Acertei.

A professora faz a chamada enquanto os alunos respondem.

Eles entregam rapidamente. A professora fala:

P – Eu não disse que era rápido?

Os alunos vão entregando. Após todos entregarem, fala:

P – Gente, obrigada.