Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Estatística e Informática

Pós Graduação em Biometria e Estatística Aplicada

A DISTRIBUIÇÃO BETA WEIBULL INVERSA GENERALIZADA: DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÕES

Danielle Loureiro Roges

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife - PE
2011

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Estatística e Informática

Danielle Loureiro Roges

A DISTRIBUIÇÃO BETA WEIBULL INVERSA GENERALIZADA: DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÕES

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Biometria e Estatística Aplicada do Departamento de Estatística e Informática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada.

Orientador: *Cláudio Tadeu Cristino*
Co-orientadora: *Roseli Aparecida Leandro*

Recife - PE
2011

Dedico, a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta, por ter me concedido a graça de nascer do amor dos meus pais e ao longo de minha vida ter permitido chegar até aqui.

À minha mãe Luzia Roges que é a razão da minha vida e luta.

Ao meu Orientador Cláudio Tadeu Cristino pela sua paciência e ajuda no decorrer do meu período como mestrando.

A Profª Roseli Aparecida Leandro pelas orientações fornecidas para elaboração deste trabalho.

Ao Secretário Marco Antônio dos Santos pela a amizade e ajuda durante todo o decorrer deste período.

A todos meus amigos do programa de pós-graduação pela interação produtiva e harmoniosa durante nosso convívio.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística e Informática pela convivência agradável durante esse período.

"Nunca perca a fé na humanidade, pois ela é como um oceano. Só porque existem algumas gotas de água suja nele, não quer dizer que ele esteja sujo por completo."

—MAHATMA GHANDI

RESUMO

A distribuição Weibull Inversa Generalizada (WIG), proposta por Gusmão et al. (2009), que tem a habilidade de modelar funções de risco com forma unimodal, que são bastante comuns em estudos biológicos e de confiabilidade, é generalizada por uma beta. Daí tem-se, como proposta, a distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada (BWIG) com cinco parâmetros e taxa de falha decrescente e unimodal. A BWIG tem a distribuição WIG como um caso particular. Um compreensivo tratamento das propriedades matemáticas da BWIG é provido, sendo encontradas as expressões para suas funções geradoras de momentos e determinado o r-ésimo momento generalizado. Também foi realizada uma discussão sobre a estimação da máxima verossimilhança e as expressões para os elementos da matriz de informação observada. A distribuição Log-Beta Weibull Inversa Generalizada e sua respectiva regressão também foram desenvolvidas. Ainda foram encontradas a Entropia de Shanonn e a Estatística de Ordem da distribuição BWIG. Um comparativo sobre os resultados fornecidos pelas distribuições WIG e BWIG foi realizado a partir da modelagem de um conjunto de dados agrários.

Palavras-chave: Beta Generalização, Estimação, Inferência, Sobrevivência, Verossimilhança, Weibull.

ABSTRACT

THE Generalized Inverse Weibull distribution (WIG), proposed by Gusmão et al. (2009), which has the ability to model hazard function with unimodal shape, which are quite common in biological and reliability studies, is generalized by a beta. It has, as proposed, the Beta Generalized Inverse Weibull distribution (BGIW) with five parameters and failure rate decreasing and unimodal. The distribution BWIG has WIG as a particular case. A comprehensive treatment of mathematical properties of BWIG is provided, and found the expressions for their generating functions of moments and the certain generalized r-th moment. There was also a discussion of maximum likelihood estimation and the expressions for the elements of observed information matrix. The distribution of Log-Beta Generalized Inverse Weibull and its respective regression also been developed. Also were found the Entropy of Shanonn and the Order Statistics of the distribution BWIG. A comparison of the results provided by the WIG and BWIG distributions was performed by modeling a data set agrarian.

Keywords: Beta Generalization, Estimation, Inference, Likelihood, Survival, Weibull.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Analisar o tempo de vida de organismos ou o tempo de falha de sistemas mecânicos tem sido o assunto explorado por pesquisadores de diversas áreas como, Biologia, Medicina, Engenharia, Estatística, entre outras.

A análise de sobrevivência é o termo utilizado para designar a análise estatística de dados relacionados a uma variável que representa o tempo mensurado a partir de um certo marco até a ocorrência de determinado acontecimento de interesse. Esta análise permite estudar tempos de vida, também designados por tempos de sobrevivência, ultrapassando as dificuldades inerentes a este tipo de dados. A característica fundamental é a existência de censura, ou seja, para alguns indivíduos pode não ser possível observar o acontecimento de interesse durante o período em que estiveram em observação.

Nos estudos em análise de sobrevivência, algumas distribuições são usadas para estimar os tempos de sobrevivência de indivíduos e algumas descrevem de forma adequada certas variáveis clínicas e industriais. Também existem distribuiçõe mais adequadas para se descrever a variável "tempo até a falha" (função de risco) (Colosimo e Giolo, 2006).

> "Embora exista uma série de modelos probabilísticos utilizados em análise de dados de sobrevivência, alguns destes modelos ocupam uma posição de destaque por sua comprovada adequação a várias situações práticas. Entre estes modelos é possível citar o Exponencial, o de Weibull, o Log-Gama Generalizado e o Log-Normal." (Colosimo e Giolo, 2006).

As distribuições mencionadas acima acomodam algumas formas de risco, como a forma constante (distribuição exponencial) e a forma crescente e decrescente (distribuição Weibull). Em Colosimo e Giolo (2006), é possível se encontrar exemplos destes gráficos descritos anteriormente sobre análise de sobrevivência.

É comum encontrarmos dados de sobrevivência com função de risco modelada de diferentes formas, como por exemplo, em forma de U ou banheira e unimodal, como no artigo do Jiang et al. (2001). Os modelos conhecidos para essas situações, como por exemplo a distribuição Beta Weibull Modificada que modela a função taxa de falha em forma de U e unimodal e a distribuição Weibull Inversa Generalizada que modela função de risco unimodal, em geral, têm como origem o modelo Weibull, que tradicionalmente pode modelar funções de risco com formas constantes, crescentes e decrescentes.

A distribuição de Weibull foi proposta originalmente por W. Weibull (1954) em estudos relacionados ao tempo de falha devido à fadiga de metais e, desde então, vem sendo frequentemente usada em estudos biomédicos e industriais. A sua popularidade em aplicações práticas deve-se ao fato dela apresentar uma grande variedade de formas, todas com uma propriedade básica: a sua função de taxa de falha é monótona (Colosimo e Giolo, 2006).

Esta distribuição é bastante utilizada em estudos associados ao tempo de falha, devido à grande aplicabilidade na área médica como na área de confiabilidade, bem como na análise de sobrevivência. Dentro do contexto da taxa de risco ter forma unimodal, a distribuição Weibull inversa atende a este requisito, (Jiang et al., 2001).

Em 2009, Gusmão et al. propuseram uma nova distribuição nomeada de Weibull inversa generalizada que, devido a sua flexibilidade em acomodar algumas formas de riscos, já que a mesma possui um parâmetro a mais, sendo, portanto, triparamétrica, oferece a vantagem de modelar funções de risco crescentes, decrescentes e unimodal.

A distribuição beta é uma das mais usadas para modelar experimentos aleatórios que produzem resultados no intervalo $(0, 1)$, dada a grande flexibilidade de ajuste de seus parâmetros, sendo, desta forma, a mais flexível da família de distribuições. Ela tem relação com várias das mais conhecidas distribuições univariadas.

As distribuições beta são muito versáteis e podem modelar uma grande variedade de incertezas. Muitas das distribuições finitas encontradas na prática podem ser facilmente transformadas na distribuição beta padronizada, como por exemplo as distribuições Fréchet, Gumbel, normal e exponencial. Bury (1999) lista um conjunto de aplicações da distribuição Beta em Engenharia. Janardan e Padmanabhan (1986) modelam variáveis hidrológicas usando a distribuição Beta. McNally (1990) utiliza a distribuição Beta no estudo de algumas variáveis que afetam a reprodutibilidade de vacas. Graham e Hollands (1990) e Milyutin e Yaromenko (1991) usam a distribuição Beta para estudar índices relacionados à transmissão da radiação solar. A potência de sinais de radar é modelada por Maffet e Wackerman (1991) através da distribuição Beta. Wiley et al. (1989) desenvolvem um modelo beta para estimar a probabilidade de transmissão de HIV durante o contato sexual entre um indivíduo infectado e um indivíduo sadio. Johnson et al. (1995b, p. 235) observam: "*the beta distributions are among the most frequently employed to model theorical distributions.*".

Um dos maiores benefícios da classe de distribuições beta generalizadas é sua habilidade de melhor ajustar dados assimétricos que possam não ser propriamente ajustados pelas distribuições usuais, tais como a distribuição exponencial, a distribuição gaussiana e a distribuição weibull.

Neste trabalho, propõem-se uma generalização da distribuição Weibull Inversa Generalizada com o objetivo de consegui maior aplicabilidade na área de Análise de Sobrevivência, já que será ampliado o número de parâmetros desta distribuição. Esta proposta deriva da seguinte classe geral: se $G(x)$ representa a função distribuição acumulada de uma variável aleatória, então uma classe generalizada de distribuições pode ser definida pela expressão

$$F(x) = I_{G(x)}(a, b)$$

para $a > 0$ e $b > 0$, em que

$$I_y(a, b) = \frac{B_y(a, b)}{B(a, b)}$$

denota a função razão beta incompleta, e

$$B_y(a, b) = \int_0^y w^{(a-1)}(1-w)^{(b-1)}dw$$

denota a função beta incompleta.

Para se obter mais informações sobre esta formulação, ver Silva et al. (2003).

Esta classe de generalizações de distribuições tem recebido considerável atenção nos últimos anos, em particular depois dos recentes trabalhos de Eugene et al. (2002), Lee e Famoye (2002) e Jones (2004). Eugene et al. (2002) introduziram o que é conhecido como a distribuição Beta Normal, tendo em $G(x)$ a função distribuição acumulada da normal com parâmetros μ e σ. Os primeiros momentos da distribuição Normal Beta foram determinados por Eugene et al. (2002). Gupta e Nadarajah (2004) determinaram expressões mais gerais para os momentos esta distribuição. Mais recentemente, Nadarajah e Kotz (2004) foram capazes de fornecer expressões de forma fechada para os momentos, a distribuição assintótica das estatísticas de ordem extrema e o processo de estimativa para a distribuição Beta Gumbel.

A distribuição desenvolvida nesta dissertação, nomeada de Beta Weibull Inversa Generalizada, possui cinco parâmetros, logo fornece maior flexibilidade para acomodar algumas formas de riscos, apresentando-se como uma importante distribuição, pois pode ser utilizada nos mais variados problemas de modelagem de dados na análise de sobrevivência. Outra característica desta nova distribuição é a de possuir como caso particular as distribuições Weibull inversa, exponencial inversa, Weibull inversa generalizada e Rayleigh inversa.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DE LITERATURA

A Inferência Estatística é o importante ramo da Estatística que busca adquirir procedimentos adequados para fazer afirmações a partir de um conjunto de dados representativo (amostra) sobre um universo. Tal tipo de afirmação deve sempre vir acompanhada de uma medida de precisão sobre sua veracidade, que é determinada a partir de procedimentos tais como: obter uma estimativa de um parâmetro θ desconhecido e construir um conjunto de valores possíveis de θ que tenha uma confiabilidade especificada. Logo, as atividades da inferência são: a estimação, a construção de regiões de confiança e o desenvolvimento de testes de hipóteses (Cordeiro, 1999).

A técnica estatística conhecida como análise de sobrevivência é usada quando se pretende analisar um fenômeno em relação a um período de tempo (ou um conjunto de dados ordenados), isto é, o tempo transcorrido entre um evento inicial, no qual o sujeito ou um objeto entra em um estado particular e um evento final, que modifica este estado (Lee, E.T., 1992). Esta análise pode ser definida como um conjunto de técnicas e modelos estatísticos que analisa dados tal como o tempo de ocorrência de determinado evento de interesse. Este método se faz peculiar devido às características especiais e devido aos tipos de dados que são geralmente utilizados para esta análise como dados contendo censura (perda por tempo de observação incompleta), por exemplo. Este método exige a introdução de uma variável extra na análise, que indica se o valor do tempo de sobrevivência de um dado indivíduo foi observado ou não (Louzada-Neto et al., 2001).

Colosimo e Giolo (2006) apresentaram um dos métodos que dispomos para testarmos se nosso modelo está bem ajustados aos dados, o qual consiste na comparação da função de sobrevivência do modelo paramétrico proposto com o estimador de Kaplan-Meier. A partir das estimativas dos parâmetros do modelo, estima-se a função de sobrevivência. Para o mesmo conjunto de dados, obtém-se a estimativa de Kaplan-Meier para a função de sobrevivência. Então, comparam-se graficamente as funções de sobrevivências estimadas para o modelo paramétrico proposto com o de Kaplan-Meier. Se o modelo for adequado, ele deverá ter uma curva de sobrevivência que se aproxime da curva de sobrevivência do estimador de Kaplan-Meier. Outro método consiste em esboçarmos a função de sobrevivência do modelo paramétrico versus a estimativa de Kaplan-Meier para a função de sobrevivência, se esta curva estiver próxima da reta $y = x$ teremos um bom ajuste.

Cordeiro et al. (2008) introduziram a distribuição Beta Exponencial Generalizada e observaram a flexibilidade deste modelo na análise de dados reais positivos, observando a eficácia desta distribuição em relação a distribuição Exponencial Generalizada.

Nadarajah e Kotz (2004) apresentaram a distribuição Beta Gumbel e fizeram um tratamento estatístico de suas propriedades matemáticas. A partir desta generalização, conseguiram ampliar a aplicabilidade desta distribuição na área da Engenharia.

Silva et al (2010), propuseram a distribuição Beta Weibull Modificada (BWM) que apresentou flexibilidade para acomodar várias formas da função de taxa de falha, por exemplo, forma de U e unimodal, sendo, portanto, muito utilizada em uma variedade de aplicações nas áreas de confiabilidade, Medicina e Biologia, bem como em outras áreas de investigação.

Gupta e Kundu (2000), introduziram e estudaram uma nova distribuição proposta por eles mesmos denominada distribuição exponencial generalizada e pode ser usada como um caso alternativo para as distribuições gama e Weibull em diversas situações e provendo as expressões a estimação dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança e ainda discutem sobre alguns problemas de testes de hipóteses.

Ainda Gupta e Kundu (1999) descrevem a forma assimétrica à direita da função densidade da distribuição exponencial generalizada e também a monotonicidade da função taxa de falha. Também é abordado diferentes métodos para estimação dos parâmetros.

Mudholkar et al (1996) estudam a distribuição Weibull para modelar dados de sobrevivência, também analisam como fica inserida em uma grande família a distribuição Weibull quando adicionado a ela um novo parâmetro. Estas novas famílias detém formas de bacia e uniomodal para função de risco como também são unimodais. Ainda é visto que estas famílias são analiticamente tratáveis e computacionalmente maleáveis.

A Weibull modificada é proposta por Lai et al (2003) e esta distribuição é capaz de modelar funções taxa de falha em forma de bacia. O modelo pode ser considerado uma generalização triparâmetrica de uma distribuição Weibull.

Choudhury (2005) estudou características importantes da família Weibull exponencializada atráves dos momentos. A família Weibull exponencializada é obtida pela adição de um parâmetro de forma.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

3.1 INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

Em Cordeiro (1992), é afirmado que a *Inferência* é a parte fundamental da Estatística e é tão antiga quanto a teoria dos métodos que formam a Estatística atual. As primeiras técnicas de inferência são no mínimo bicentenária e surgiram com os trabalhos de Bayes, DeMoivre, Gauss e Laplace. Fisher (1912), propôs uma Inferência Estatística obtida diretamente pela função de verossimilhança, todavia o fortalecimento da proposta de Fisher só foi feita no período de 1930 à 1940, devido às aplicações em problemas agrícolas. A Inferência tem como objetivo fim providenciar regras apropriadas de natureza científica baseando-se em um conjunto de dados para executar situações como:

1. estimação;

2. construção de intervalos de confiança;

3. desenvolvimento de testes de hipóteses.

Estimadores pontuais são aqueles que fornecem um único valor numérico como estimativa para o parâmetro de interesse (Magalhães e Lima, 2008). Estimação por intervalo é um processo que apresenta uma estimativa mais informativa a respeito do parâmetro de interesse que incorpora uma medida de precisão do valor obtido. Desta forma é denominado de intervalo de confiança o processo que introduz à estimativa pontual do parâmetro informações sobre sua variabilidade (Magalhães e Lima, 2008). "*Hipótese estatística é qualquer informação acerca da distribuição de probabilidade de uma ou mais variáveis aleatórias.*" (Bolfarine e Sandoval, 2000).

3.1.1 Função de verossimilhança

Seja $Y = (Y_1, ..., Y_n)^T$ uma variável aleatória caracterizada por uma função de probabilidade ou densidade de probabilidade com forma analítica $f(y; \theta)$ conhecida e um vetor de parâmetros desconhecidos $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)^T$ e $\theta \in \Theta$ em que Θ é o espaço paramétrico com $\Theta \subset \mathbb{R}^r$, em que $\mathbb{R}^r$ é o espaço euclidiano r-dimensional.

A função de verossimilhança $L(\theta)$ é dada por

$$L(\theta) = f(y; \theta),$$

ou seja, vendo a função densidade ou de probabilidade como uma função dos parâmetros. Desta forma, a função de verossimilhança uma vez inserida obtém-se informação sobre o vetor de parâmetros θ. Se Y tem componentes mutuamente independentes para $f(y_i; \theta)$, $1 \leq i \leq n$, tem-se

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta)$$

O logaritmo da função de verossimilhança é conhecido como função suporte e no caso de variáveis aleatórias independentes é dado por:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \log \left[\prod_{i=1}^{n} f\left(y_i; \theta\right) \right] = \sum_{i=1}^{n} \log \left[f\left(y_i; \theta\right) \right]$$

considerando vários vetores θ's aquele que sobre o mesmo conjunto de dados tiver a maior valor para verossimilhança será o vetor θ mais adequado ou o mais próximo de θ_0 (o vetor de parâmetros verdadeiros).

3.1.2 Função Escore

Pela definição a denominada função escore também conhecida por vetor escore é a primeira derivada da função suporte, dada por:

$$U\left(\hat{\theta}\right) = \ell^{'}\left(\theta; y\right) = \frac{\partial \ell\left(\theta; y\right)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ell\left(\theta\right)}{\partial \theta}.$$

O vetor escore é um vetor com dimensão r. A primeiras derivadas da função escore com sinal negativo é chamada de matriz de informação observada e é dada por:

$$J\left(\hat{\theta}\right) = -\frac{\partial U^T}{\partial \theta} = -\ell''(\theta) = -\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T}.$$

3.1.3 Estimativa de máxima verossimilhança

Com o objetivo de estimar os parâmetros de uma distribuição usa-se uma técnica de cálculo para encontrar máximos e mínimos, que consiste em derivar uma função e igualar o resultado à zero, então para nosso caso derivamos a função suporte e igualamos à zero.

$$U\left(\hat{\theta}\right) = 0.$$

3.1.4 Métodos iterativos

Os métodos iterativos são aplicados nos casos em que as equações de máxima verossimilhança produzem equações que não tem soluções analíticas ou quando a dimensão k do parâmetro é muito grande, ao expandir $U\left(\hat{\theta}\right)$ em série multivariada de Taylor (Stewart e Castro, 2009) até a primeira ordem ao redor de um ponto qualquer θ pertencente a uma vizinhança de $\hat{\theta}$, tem-se, aproximadamente

$$U\left(\hat{\theta}\right) = U(\theta) + \frac{\partial U(\theta)^T}{\partial \theta}\left(\theta - \hat{\theta}\right) + \Theta(\theta^2)$$

sabendo que $U\left(\hat{\theta}\right) = 0$ e Θ é a ordem do erro, tem-se que

$$\hat{\theta} - \theta \cong [J(\theta)]^{-1} U(\theta)$$

O método de Newton-Raphson, de acordo com Barroso et al. (1987), consiste em utilizar a equação obtida de forma iterativa, assim

$$\hat{\theta}^{(m+1)} \cong \theta^{(m)} + \left[J\left(\theta^{(m)}\right)\right]^{-1} U\left(\theta^{(m)}\right),$$

em que as quantidades com superescrito (m) são avaliadas na m-ésima iteração. Repete-se o procedimento até a diferença entre $\hat{\theta}^{(m+1)}$ e $\theta^{(m)}$ se tornar tão pequena quanto se queira ou menor que uma certa quantidade definida.

3.1.5 Momentos e cumulantes

Seja X uma variável aleatória com fdp $f_x(.)$. A função geratriz de momentos (*fgm*) corresponde ao valor esperado de e^{tX}, para $t \in \mathbb{R}$, ou seja, é definida como:

$$M(t) = E(e^{tY}),$$

definida para t numa vizinhança da origem. A função geratriz de momentos $M(t)$ pode ser escrita também pela seguinte expansão:

$$M(t) = 1 + \sum_k \mu'_k \frac{t^k}{k!}$$

onde μ'_k representa o momento de ordem K. Esta expressão é suposta convergente para todo $|t|$ suficientemente pequeno. A função geratriz de cumulantes (*fgc*), que é o logaritmo da função geratriz de momentos, é definida como segue:

$$K(t) = \log\, M(t)$$

e também a função geratriz de cumulantes pode ser expandida

$$K(t) = \sum_k \kappa_k \frac{t^k}{k!}.$$

Os quatro primeiros cumulantes são expressos por:

$$\kappa_1 = \mu'_1,$$

$$\kappa_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$\kappa_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1$$

$$\kappa_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 - 3\mu'^2_2 + 12\mu'_2\mu'^2_1 - 6\mu'^4_1$$

3.1.6 Estatística de ordem e Entropia de Shannon

Para um conjunto de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, $X_1, X_2, ..., X_n$, cada uma com função de distribuição acumulada $F(x)$ e função densidade $f(x)$, as estatísticas de ordem são definidas como seu arranjo em ordem crescente e representadas por $X_{[1]}$, $X_{[2]}$,...,$X_{[n]}$, em que $X_{[r]}$ corresponde a r-ésima estatística de ordem.

A função distribuição acumulada da r-ésima estatística de ordem, indicada por $F_r(x)$, onde $r = 1, ..., n$, pode ser obtida por:

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} C_{n;i} F^i(x)[1 - F(x)]^{n-i},$$

em que $C_{n;i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$

Caso exista, a função densidade é definida por:

$$f_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}[1 - F(x)]^{n-r} f(x), \; -\infty < x < \infty.$$

Como casos especiais têm-se a função distribuição do mínimo e do máximo das estatísticas de ordem.

Para o mínimo da amostra, tem-se:

$$F_1(x) = 1 - [1 - F(x)]^n,$$

como função distribuição acumulada e

$$f_1(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x),$$

como função densidade.

Para o máximo da amostra, tem-se:

$$F_n(x) = [F(x)]^n,$$

como função distribuição acumulada e

$$f_n(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x),$$

como função densidade.

A entropia surge com o objetivo distinguir processos reversíveis e irreversíveis e tendo desta forma uma interação direta com a denominada "seta do tempo". A definição de entropia inicialmente era como uma relação entre diferenciais, em que o inverso da temperatura efetuava-se como fator integrante para a quantidade de calor. A primeira nova interpretação do conceito surgiu com a Mecânica Estatística. O conceito de entropia em mecânica estatística está vinculada ao logaritmo da contagem de quantos estados microscopicamente distintos são compatíveis com uma mesma descrição macroscópica do sistema.

Durante século XX, eventos como o advento da telefonia e a expansão do uso do telégrafo impuseram desafios sobre os limites para as taxas de transmissão de informação veiculadas por canais ruidosos. Havia a crença de que a probabilidade de erro na recepção de uma mensagem somente seria reduzida pela redução da taxa de transmissão. Claude Shannon (1948) não concordou com esta crença e demonstrou que se um canal tivesse capacidade não-nula então probabilidades de erro tão pequenas quanto se queira seriam alcançadas uma vez que a taxa de transmissão permanecesse abaixo da capacidade do canal. Shannon também afirmou que processos aleatórios como a fala ou a música tinham uma complexidade irredutível abaixo da qual nenhuma compressão de sinal seria possível.

A entropia de Shannon tem por objetivo medir o grau de incerteza sobre espaço desordenado, de um modo geral. O conceito de entropia gera uma oportunidade para comparação das propriedades de um sistema em termos numéricos, medindo a informação contida em um evento probabilístico. A definição de entropia de Shannon de uma variável aleatória T com função densidade de probabilidade $f(t)$ é uma medida dada por:

$$E\left\{-\log\left[f\left(t\right)\right]\right\}$$

3.2 ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA

A Análise de Sobrevivência é um ramo da Estatística que vem apresentando o maior crescimento nas duas últimas décadas do século passado de acordo com Colosimo e Giolo (2006), isto devido ao avanço tecnológico na área computacional e com o melhoramento e desenvolvimento das técnicas estatísticas. A análise de sobrevivência é uma técnica estatística utilizada em situações em que, geralmente, a variável resposta é o intervalo de tempo até o acontecimento de um evento de interesse e a este tempo é dado o nome de *tempo de falha*. O tempo de falha pode ser, por exemplo, o tempo útil de um equipamento eletrônico até sua queima, pode ser o tempo de vida de um paciente do momento que foi diagnosticado a patologia até o falecimento do mesmo ou até cura. A característica principal dos dados em análise de sobrevivência é a presença da censura, que consiste em uma observação parcial da resposta. Na ausência de censura técnicas estatísticas como análise de regressão e planejamentos de experimentos seriam aplicadas adequadamente a problema com estes tipos de dados. Os dados de sobrevivência são caracterizados pelos tempos de falhas e pelas censuras contidos no mesmo.

3.2.1 Censura

Observações parciais são comuns em estudos clínicos, até tendo longos períodos de duração, estas observações são denominadas de *censuras* e podem ocorrer por diversas razões, por exemplo se estivermos analisando um grupo de pacientes com alguma patologia e por ventura alguns destes abandonarem o estudo precocimente por uma razão diferente do evento de interesse. Mesmo que alguns dados dentro do estudo de análise de sobrevivência sejam censurados eles devem ser utilizados, pois mesmo sendo parciais fornecem informações sobre o tempo de vida dos individuos em estudo e o não utilizar estes dados parciais pode produzir conclusões viciadas.

Tem-se tipos de mecanismos de censuras diferentes como as censuras tipo I, II e a aleatória. A censura do tipo I consiste em dar um final ao estudo num período de tempo pré-estabelecido, a censura tipo II consiste em terminar o estudo quando um número determinado de eventos de interesse tiverem acontecido e censura aleatória pode acontecer quando a retirada da observação no estudo em questão ocorrer antes do evento de interesse acontecer.

Tentando ter uma representação simples do mecanismo de censura aleatória duas variáveis aleatórias serão utilizadas. Seja T e C variáveis aleatórias independentes a primeira representando o tempo de falha e a última a censura, respectivamente. Daí o tempo de uma observação é dado por $t = \min(T, C)$ e o indicador de censura é expresso por:

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{para o tempo de falha} \\ 0, & \text{para a censura} \end{cases}$$

3.2.2 Funções do tempo de sobrevivência

Seja T uma variável aleatória não-negativa, comumente contínua, que representa o tempo de falha, é geralmente especificada em Análise de Sobrevivência pelas suas funções de sobrevivência e risco (taxa de falha).

3.2.3 Função de Sobrevivência

A função de sobrevivência ou sobrevida é uma função probabilística utilizada nos estudos de análise de sobrevivência. Seja T uma variável que representa o tempo de sobrevida de um indivíduo e tendo a probabilidade deste indivíduo vir a sobreviver até um tempo t definida como a probabilidade deste indivíduo não vir a falhar até um tempo t e é expressa por:

$$S(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t), \tag{3.1}$$

em que *P(T ≤ t)=F(t)*, também a função de sobrevivência pode ser definida como segue:

$$S(t) = 1 - F(t),$$

e goza das seguintes propriedades:

1. $t = 0 \Rightarrow S(t) = 1$;
   Sabendo que $t \geq 0$, tem-se que $P(T \leq 0) = 0$. Como $S(t) = 1 - P(T \leq t)$, logo $S(t) = 1 - 0 = 1$.

2. $t \to \infty \Rightarrow S(t) = 0$;
   Quando $t \to \infty$, tem-se que $P(T \leq t) = 1$, logo, pela expressão (3.1), $S(t) = 0$.

3. $-\dfrac{d[S(t)]}{dt} = f(t)$.
   Como $F(t)$ representa a função distribuição acumulada, então sua derivada será a função densidade de probabilidade.

3.2.4 Função taxa de falha

Defini-se como a probabilidade de que a falha ocorra em um intervalo de tempo $[t, t+\Delta t)$ dado que não ocorreu antes do tempo t, dividida pelo comprimento do intervalo de tempo. Se assumirmos que Δt é muito pequeno $h(t)$ representa a função taxa de falha instantânea e é expressa como:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t}$$

Funções de sobrevida distintas podem apresentar formas semelhantes, todavia podem diferir bastante nas funções taxa de falha. Daí a importância da função taxa de falha em análise de sobrevivência.

3.2.5 Algumas relações entre as funções

Seja T uma variável aleatória contínua e não-negativa, algumas relações são obtidas em conseqüência das funções definidas anteriormente, e daí tem-se:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)},$$

em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição a qual T esteja vinculada,

$$S(t) = \exp\Big\{ - \Lambda(u) \Big\}$$

em que $\Lambda(u)$ é a função de taxa de falha acumulada que é definida por:

$$\Lambda(u) = \int_0^t h(u)du.$$

3.2.6 Função de verossimilhança em Análise de sobrevivência

De maneira geral a verossimilhança é expressa como segue

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[f(y_i; \theta) \right]^{\delta_i} \left[S\left(y_i; \theta\right) \right]^{1-\delta_i},$$

em que δ_i é o indicador de censura, se $\delta_i = 1$ ocorre tempo de falha e se $\delta_i = 0$ ocorre tempo de censura.

CAPÍTULO 4

DISTRIBUIÇÃO WEIBULL INVERSA GENERALIZADA

A Distribuição Weibull inversa generalizada é uma modificaçao para distribuição Weibull inversa; que consiste em elevar a função acumulada da distribuição Weibull inversa a uma constante γ positiva ao qual a esta nova função acumulada expressamos por $F(t)$ que é dada por:

$$F(t) = \Big\{G(t)\Big\}^{\gamma} = \Big\{\exp\Big[-\Big(\frac{\alpha}{t}\Big)^{\beta}\Big]\Big\}^{\gamma} = \exp\Big[-\gamma\Big(\frac{\alpha}{t}\Big)^{\beta}\Big]$$

em que α, β e $\gamma > 0$ e para a função densidade de probabilidade:

$$f(t) = \gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)}\exp\Big[-\gamma\Big(\frac{\alpha}{t}\Big)^{\beta}\Big], \quad t > 0.$$

A inserção deste do parâmetro γ tem por objetivo fim aumentar a flexibilidade da distribuição Weibull inversa generalizada.

4.1 FUNÇÃO DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL INVERSA GENERALIZADA (DWIG)

A função densidade de probabilidade da DWIG é expressa como segue:

$$f(t) = \gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)}\exp\Big[-\gamma\Big(\frac{\alpha}{t}\Big)^{\beta}\Big]$$

onde $t > 0$.

4.2 FUNÇÃO DE SOBREVIVÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL INVERSA GENERALIZADA

Usando a relação $S(t) = 1 - F(t)$ encontra-se de forma direta a expressão da função de sobrevivência da DWIG

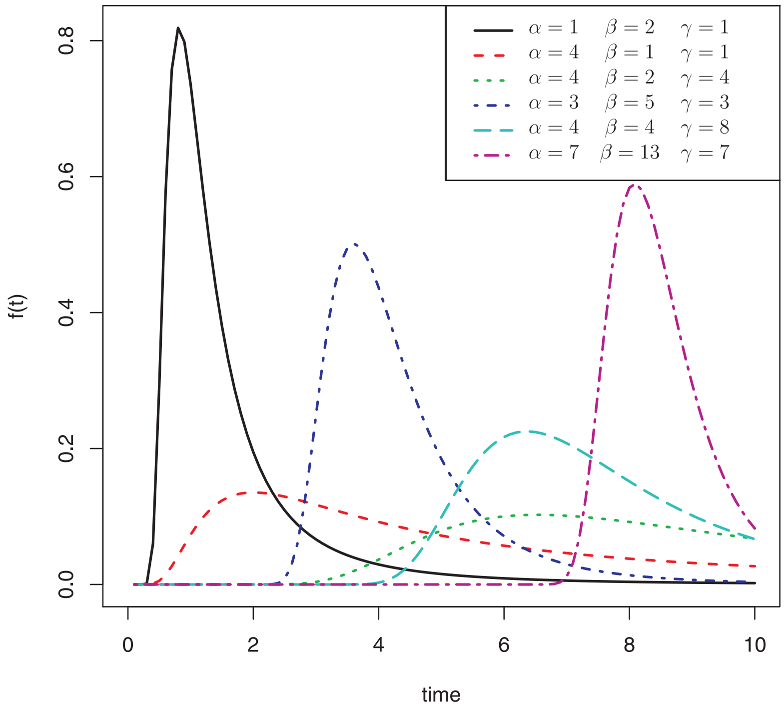

Figura 4.1 Gráfico da função densidade da DWIG para alguns valores de α, β e γ.

$$S(t) = 1 - \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]$$

onde $t > 0$ e α, β e $\gamma > 0$.

4.3 FUNÇÃO TAXA DE FALHA DA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL INVERSA GENERALIZADA

A função taxa de falha é expressa por:

$$h(t) = \gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)} \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\left\{1 - \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\right\}^{-1}.$$

em que $t > 0$ e α, β e $\gamma > 0$.

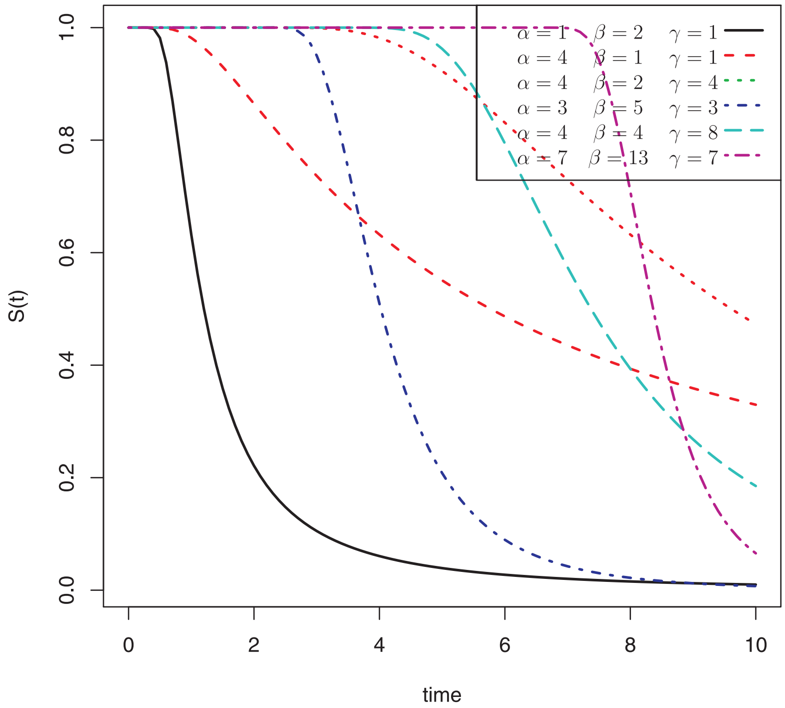

Figura 4.2 Função de Sobrevivência da DWIG.

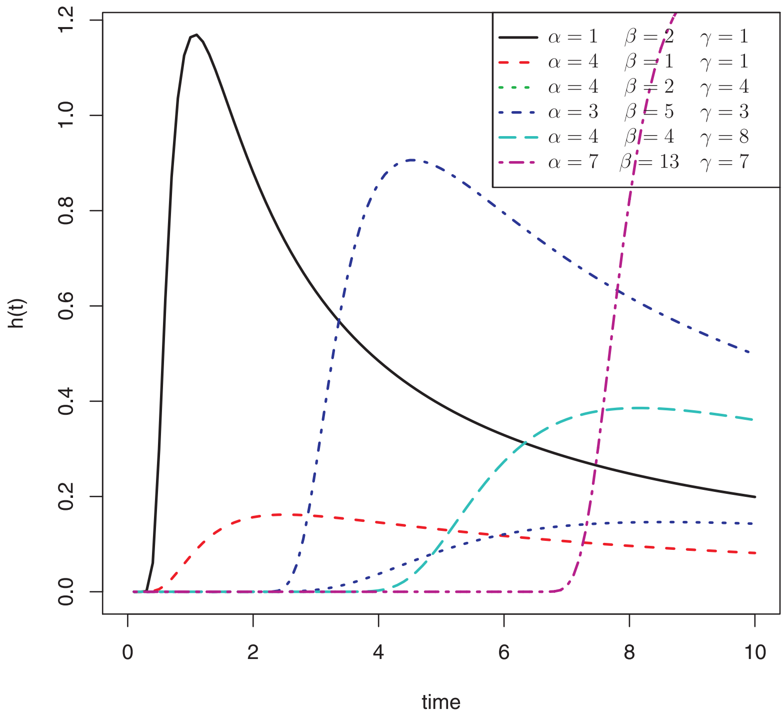

Figura 4.3 Função Taxa de Falha da DWIG.

4.4 RELAÇÃO COM OUTRAS DISTRIBUIÇÕES

A distribuição Weibull inversa generalizada tem algumas distribuições como casos particulares. A tabela a seguir mostra-nos estas relações.

Tabela 4.1 Algumas funções de distribuição geradas a partir da distribuição Weibull inversa generalizada

Distribuição	Parâmetros
Weibull inversa	$\gamma = 1$
exponencial inversa	$\beta = 1$, $\gamma = 1$
Rayleigh inversa	$\beta = 2$, $\gamma = 1$

4.5 MOMENTOS, FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS E FUNÇÃO GERADORA DE CUMULANTES

É necessário enfatizar a importância e a necessidade dos momentos em qualquer análise estatística especialmente em trabalhos aplicados. Algumas das mais importantes características de uma dada distribuição pode ser estudada através dos momentos como: média, variância, assimétria e curtose. Seja T uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada pela distribuição Weibull inversa generalizada(DWIG) o k-ésimo momento de T é dado por

$$\mu'_k = E(T^k) = \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right)$$

A função geradora de momentos é

$$M_t\left(z\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{z^k}{k!} E\left(T^k\right)\right]$$

A função geradora de cumulantes é

$$K\left(z\right) = \log M_t\left(z\right) = \log\left\{\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{z^k}{k!} E\left(T^k\right)\right]\right\}$$

então o primeiro cumulante é a derivada da função geradora de cumulantes e em seguida iguala-se z à zero (z em nosso caso)

$$K^{'}\left(z\right) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) k z^{k-1}\right] \times \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) z^k\right]^{-1}$$

expandindo os somatórios e em seguida igualando z à zero, tem-se:

$$K^{'}(z) = k_1 = \gamma^{\frac{1}{\beta}} \alpha \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$$

que satisfaz a relação

$$k_1 = E(T) = \gamma^{\frac{1}{\beta}} \alpha \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta}\right). \tag{4.1}$$

CAPÍTULO 5

A DISTRIBUIÇÃO BETA WEIBULL INVERSA GENERALIZADA

NESTE trabalho foi proposto uma modificação da distribuição Weibull inversa generalizada; que consiste em utilizar a função acumulada da distribuição Weibull inversa generalizada como limite superior de uma distribuição Beta e com isto tem-se uma nova função acumulada que expressamos por $F(t)$ e é dada por:

$$F(t) = I_{G(t)}(a, b)$$

para $a > 0$ e $b > 0$, em que $G(t)$ denota a função distribuição acumulada de uma variável aleatória T, que no caso em questão trata-se de uma variável aleatória com distribuição Weibull inversa generalizada e sendo

$$I_{G(t)}(a, b) = \frac{B_y(a, b)}{B(a, b)}$$

e

$$B_y(a, b) = \int_0^y u^{a-1}(1-u)^{b-1}du.$$

5.1 A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DA DISTRIBUIÇÃO BETA WEIBULL INVERSA GENERALIZADA

Seja T uma variável aleatória que segue uma distribuição Weibull inversa generalizada e derivando a expressão de F(t) obtemos a função densidade de probabilidade da distribuição beta Weibull inversa generalizada que é expressa por:

$$f(t) = \frac{g(t)}{B(a, b)} G(t)^{a-1}(1 - G(t))^{b-1}, \quad a > 0, b > 0.$$

Substituindo $G(t)$ pela função acumulada da distribuição Weibull inversa generalizada, tem-se:

$$f(t) = \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)}e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}}}{B(a,b)}\left\{\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\right\}^{(a-1)}\left\{1-\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\right\}^{(b-1)}$$

com $t > 0$.

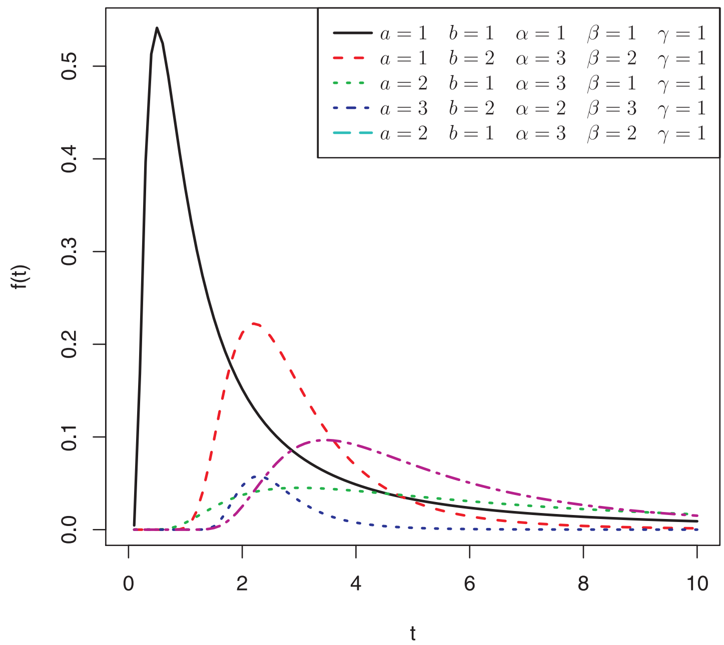

Figura 5.1 Função densidade de probabilidade da DBWIG para alguns valores de a, b, α, β e γ.

É interessante verificar que $f(t)$ é realmente uma função densidade, para isto tem-se que:

P1 $f(t)$ é maior que 0 para todo t pertencente ao domínio de $f(t)$;

Prova: Como $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ e t são maiores que zero, então $f(t)$ é positiva e se

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; f(t) \to 0.$$

Logo $f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. □

P2 A integral de $f(t)$ é igual a 1 no domínio de $f(t)$.

Prova: Tem-se que

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)}}{B(a,b)}\exp\left[-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\left\{1-\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\right\}^{(b-1)}dt$$

Tomando $u = \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]$ tem-se, $0 < u < 1$

$$du = \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)}}{t^{2\beta}}dt.$$

Logo,

$$\frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}}{B(a,b)}\int_0^1 t^{-(\beta+1)}u^{a}(1-u)^{b-1}\frac{(t)^{\beta+1}}{u\gamma\beta\alpha^{\beta}}du = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 u^{a}(1-u)^{b-1}du = 1$$

Agora, a função distribuição acumulada é dada por

$$F(t) = \int_0^x \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)}\exp\left[-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]}{B(a,b)}\left(1-\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\right)^{(b-1)}dt$$

Tomando $u = \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]$ tem-se,

$$0 < u < \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right].$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}}{B(a,b)}\int_0^{\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]} t^{-(\beta+1)}u^{a}(1-u)^{b-1}\frac{(t)^{\beta+1}}{u\gamma\beta\alpha^{\beta}}du \\ &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^{\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]} u^{a}(1-u)^{b-1}du \\ &= \frac{B(\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right], a, b)}{B(a,b)} \end{aligned}$$

que á a representação de uma função beta incompleta regularizada. □

5.2 FUNÇÃO DE SOBREVIVÊNCIA

A função de sobrevivência é usada para estimar tempo de sobrevida de elementos de um conjunto de dados e é obtida pela seguinte relação:

$$S(t) = 1 - F(t).$$

Substituindo $F(t)$ na expressão anterior pela distribuição acumulada da beta Weibull inversa generalizada, tem-se:

$$S(t) = 1 - \frac{B\left(\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right], a, b\right)}{B(a,b)}.$$

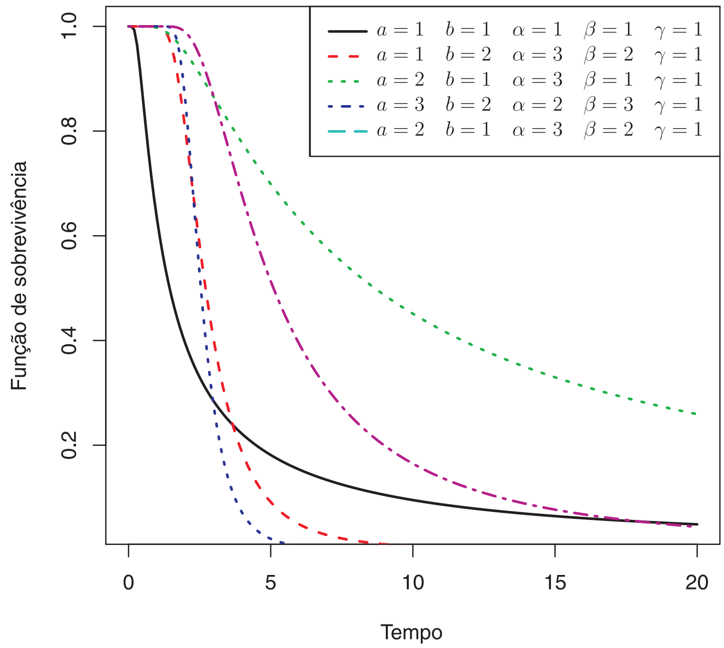

Figura 5.2 Função de sobrevivência da DBWIG.

5.3 FUNÇÃO DE RISCO (OU FUNÇÃO TAXA DE FALHA)

A função de risco é usada para calcular o risco de um dado individuo vir a falhar em um dado instante t e é obtida pela seguinte relação:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

Substituindo $F(t)$ e $f(t)$ na expressão anterior pela distribuição acumulada e pela função densidade da beta Weibull inversa generalizada, respectivamente, tem-se:

$$h(t) = \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-(\beta+1)}\exp\left[-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\left(1-\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\right)^{(b-1)}}{B(a,b) - B\left(\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right], a, b\right)}$$

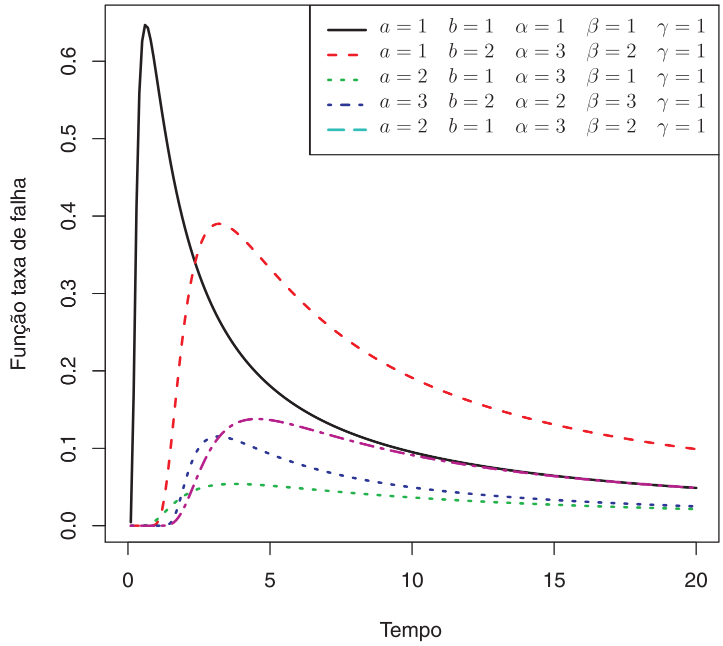

Figura 5.3 Função taxa de falha da DBWIG.

5.4 MOMENTOS

Conhecendo a importância e a necessidade dos momentos em qualquer análise estatística e a importância dos mesmos em trabalhos aplicados. Estuda-se através dos momentos as mais importantes características de uma distribuição tais como: média, variância, assimetria e curtose. Seja T uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada pela distribuição beta Weibull inversa generalizada (DBWIG) o k-ésimo momento de T é dado por:

$$E(T^k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{k-\beta-1}\exp\left\{-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right\}}{B(a,b)} 1 - \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]^{(b-1)} dt$$

Fazendo $u = \gamma\alpha^{\beta}t^{-\beta}$ e $du = -\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-\beta-1}dt$, quando $t \to 0 \Rightarrow u \to \infty$ e quando $t \to \infty \Rightarrow u \to 0$, daí

$$
\begin{aligned}
E(T^k) &= \int_0^{\infty} \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{k-\beta-1}}{B(a,b)} e^{-au}(1-e^{-u})^{b-1} \frac{du}{\gamma\beta\alpha^{\beta}t^{-\beta-1}} \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{\infty} \left[\frac{\gamma\alpha^{\beta}}{u}\right]^{\frac{k}{\beta}} e^{-au}(1-e^{-u})^{b-1} du \\
&= \frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \int_0^{\infty} u^{\frac{-k}{\beta}} e^{-au}(1-e^{-u})^{b-1} du
\end{aligned}
$$

Sabendo-se que:

$$
(1-G(x))^k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-r)r!} G(x)^r
$$

então

$$
E(T^k) = \frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \int_0^{\infty} u^{\frac{-k}{\beta}} e^{-au} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!} (e^{-u})^r du
$$

$$
E(T^k) = \frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} . \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!} \int_0^{\infty} u^{\frac{-k}{\beta}} (e^{-u})^{a+r} du
$$

Tomando $j = u(a+r)$ o que, obviamente, implica que $dj = (a+r)du$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
E(T^k) &= \frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!} \int_0^{\infty} (\frac{j}{a+r})^{\frac{-k}{\beta}} (e^{-j}) \frac{dj}{a+r} \\
&= \frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!} (a+r)^{\frac{k}{\beta}-1} \int_0^{\infty} j^{(\frac{-k}{\beta}+1-1)} (e^{-j}) dj
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
E(T^k) = \frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!} (a+r)^{\frac{k}{\beta}-1} \Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right)
$$

5.5 FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS

Sendo o k-ésimo momento de T,

$$E\left(T^k\right) = \frac{\alpha^k \gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(b)}{\Gamma(b-r) r!} (a+r)^{\frac{k}{\beta}-1} \Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right).$$

A função geradora de momentos dada por:

$$M_t\left(z\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{z^k}{k!} E\left(T^k\right)\right].$$

Daí, para distribuição beta Weibull inversa generalizada tem-se a seguinte expressão:

$$M_t\left(z\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{z^k}{k!} \frac{\alpha^k \gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(b)}{\Gamma(b-r) r!} (a+r)^{\frac{k}{\beta}-1} \Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right)\right].$$

E a partir de manipulações algébricas, tem-se:

$$M_t\left(z\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{z^k}{k!} \frac{\alpha^k \gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \frac{(-1)^r \Gamma(b)}{\Gamma(b-r) r!} (a+r)^{\frac{k}{\beta}-1} \Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right)\right].$$

5.6 A FUNÇÃO GERADORA DE CUMULANTES

A função geradora de cumulantes dada por:

$$K\left(z\right) = \log M_t\left(z\right) = \log \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{z^k}{k!} E\left(T^k\right)\right].$$

Daí, para distribuição beta Weibull inversa generalizada tem-se a seguinte expressão:

$$K\left(z\right) = \log\left\{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{z^k}{k!} \frac{\alpha^k \gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)} \frac{(-1)^r \Gamma(b)}{\Gamma(b-r) r!} (a+r)^{\frac{k}{\beta}-1} \Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right)\right]\right\}.$$

Então o primeiro cumulante é a derivada da função geradora de cumulantes e em seguida iguala-se z à zero:

$$K'(z) = \frac{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{kz^{(k-1)}}{k!}\frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{k}{\beta}-1}\Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right)\right]}{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{z^k}{k!}\frac{\alpha^k\gamma^{\frac{k}{\beta}}}{B(a,b)}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{k}{\beta}-1}\Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{\beta}\right)\right]}.$$

Expandindo os somatórios e em seguida igualando z à zero, tem-se

$$K^{'}(z) = k_1 = \frac{\alpha^1\gamma^{\frac{1}{\beta}}}{B(a,b)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{1}{\beta}-1}\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$$

Essa última expressão satisfaz a relação

$$k_1 = E\left(T\right).$$

Os próximos 3 cumulantes são dados pelas seguintes relações:

$$k_2 = E\left(T^2\right) - \left[E\left(T^1\right)\right]^2,$$

$$k_3 = E\left(T^3\right) - 3.E\left(T^2\right)E\left(T^1\right) + 2[E(T^1)]^3,$$

$$k_4 = E\left(T^4\right) - 4E\left(T^3\right)E\left(T^1\right) - 3\left[E\left(T^2\right)\right]^2 + 12E\left(T^2\right)[E\left(T^1\right)]^2 - 6\left[E\left(T^1\right)\right]^4.$$

Daí para a Distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada, tem-se:

$$\begin{aligned} k_2 = {} & \frac{\gamma^{\frac{2}{\beta}}\alpha^2\Gamma(1-2\beta^{-1})}{B(a,b)}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{2}{\beta}-1}\right] \\ & - \frac{\alpha^2\gamma^{\frac{2}{\beta}}\Gamma(1-\beta^{-1})^2}{[B(a,b)]^2}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{1}{\beta}-1}\right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 = {} & \frac{\alpha^3\gamma^{\frac{3}{\beta}}\Gamma(1-3\beta^{-1})}{B(a,b)}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{3}{\beta}-1}\right] - \frac{3\alpha^3\gamma^{\frac{3}{\beta}}\Gamma(1-\beta^{-1})\Gamma(1-2\beta^{-1})}{[B(a,b)]^2} \\ & \times\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{2}{\beta}-1}\right]\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{1}{\beta}-1}\right] \\ & + \frac{2\alpha^3\gamma^{\frac{3}{\beta}}[\Gamma(1-\beta^{-1})]^3}{[B(a,b)]^3}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(b)}{\Gamma(b-r)r!}(a+r)^{\frac{1}{\beta}-1}\right]^3 \end{aligned}$$

5.7 FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Sejam $T_1, T_2, \ldots, T_n$ variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas seguindo uma DBWIG em que o vetor de parâmetros e $\theta = (a, b, \alpha, \beta, \gamma)^T$ e a função de verossimilhança para DBWIG é expressa como segue:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma\beta\alpha^{\beta} t_i^{-(\beta+1)}}{B(a,b)} e^{-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)\beta} \left(1 - e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)\beta}\right)^{(b-1)}$$

e também pode ser escrita como

$$L(\theta) = \left(\frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}}{B(a,b)}\right)^{n} e^{-a\gamma\sum_{i=1}^{n}(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}} \prod_{i=1}^{n} t_i^{-(\beta+1)} \left(1 - e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)\beta(b-1)}\right)$$

para $t_i \geq 0$.

O logaritmo da função de verossimilhança, denominada função suporte, é dada por:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = n\log\left(\frac{\gamma\beta\alpha^{\beta}}{B(a,b)}\right) - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\log(t_i)$$
$$- a\gamma\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\right] + (b-1)\left[\sum_{i=1}^{n}\log\left(1 - e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}\right)\right], \text{ para } t_i \geq 0.$$

Para estimar os parâmetros utilizamos a equação escore, que é definida como

$$U\left(\hat{\theta}\right) = \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta} = 0.$$

Para a Beta Weibull Inversa Generalizada, tem-se

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\alpha} = n\beta\frac{1}{\alpha} - \alpha^{\beta-1}\beta\gamma\left[a\sum_{i=1}^{n}t_i^{-\beta} - (b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-\beta}(e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}})}{1 - e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}}\right]$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\beta} = n\frac{1}{\beta} - n\log\alpha - \sum_{i=1}^{n}\log(t_i) - a\gamma\sum_{i=1}^{n}\left\{\log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\right\}$$
$$+ \gamma(b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}}{1 - e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma} = n\frac{1}{\gamma} - \alpha^{\beta}\left(a\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta} - (b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-\beta}e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}}{1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}}\right)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial a} = n\psi(a+b) - n\psi(a) - \gamma\alpha^{\beta}\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{-\beta},$$

em que $\psi(z)$ é a função Digama e é dada por:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z-1} - \gamma$$

aqui γ representa a constante de Euler-Mascheroni (Sondow, 1998).

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial b} = n\psi(a+b) - n\psi(b) + \sum_{i=1}^{n} 1 - e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}} = 0$$

As funções escores descritas acima não têm forma fechada, então para solucioná-las pode-se utilizar o método iterativo de Newton-Raphson

$$\widehat{\theta} - \theta = [J(\theta)]^{-1}\, U(\theta).$$

Mas para o efetivo cálculo, é necessário encontrar a matriz de informação observada de Fisher $I(\theta)$

$$\mathbf{I}(\theta) = \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha}(\theta) & J_{\alpha\beta}(\theta) & J_{\alpha\gamma}(\theta) & J_{\alpha a}(\theta) & J_{\alpha b}(\theta) \\ J_{\beta\alpha}(\theta) & J_{\beta\beta}(\theta) & J_{\beta\gamma}(\theta) & J_{\beta a}(\theta) & J_{\beta b}(\theta) \\ J_{\gamma\alpha}(\theta) & J_{\gamma\beta}(\theta) & J_{\gamma\gamma}(\theta) & J_{\gamma a}(\theta) & J_{\gamma b}(\theta) \\ J_{a\alpha}(\theta) & J_{a\beta}(\theta) & J_{a\gamma}(\theta) & J_{aa}(\theta) & J_{ab}(\theta) \\ J_{b\alpha}(\theta) & J_{b\beta}(\theta) & J_{b\gamma}(\theta) & J_{ba}(\theta) & J_{bb}(\theta) \end{pmatrix},$$

em que $-\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\sigma}\right] = J_{\rho\sigma}(\theta)$ em que ρ e σ são parâmetros da distribuição em questão e θ o vetor de parâmetros, então

$$J_{\alpha\alpha}(\theta) = n\beta\alpha^{-2} + (\beta-1)\alpha^{\beta-2}\gamma\beta\left(a\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta} - (b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-\beta}e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}}{1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}}\right) + (\gamma\beta\alpha^{\beta-1})^2(b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-2\beta}e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}}{(1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}})^2}$$

$$J_{\alpha a}(\theta) = J_{a\alpha}(\theta) = \beta\gamma\alpha^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta}$$

$$J_{\alpha b}(\theta) = J_{b\alpha}(\theta) = -\beta\gamma\alpha^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{-\beta}e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta}}{1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta}}$$

$$J_{\beta a}(\theta) = J_{a\beta}(\theta) = \gamma\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)$$

$$J_{\gamma a}(\theta) = J_{a\gamma}(\theta) = \alpha^{\beta}\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta}$$

$$J_{aa}(\theta) = n\psi^{(1)}(a) - n\psi^{(1)}(a+b)$$

$$J_{ab}(\theta) = J_{ba}(\theta) = -n\psi^{(1)}(a+b)$$

$$J_{bb}(\theta) = n\psi^{(1)}(b) - n\psi^{(1)}(a+b)$$

$$J_{\gamma b}(\theta) = J_{b\gamma}(\theta) = -\alpha^{\beta}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{-\beta}e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta}}{1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta}}$$

$$J_{\beta b}(\theta) = J_{b\beta}(\theta) = -\gamma\sum_{i=1}^{n} \frac{(\frac{\alpha}{t_i})^\beta\log(\frac{\alpha}{t_i})e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta}}{1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta}}$$

$$J_{\alpha\beta}(\theta) = J_{\beta\alpha}(\theta) = \gamma a\beta\alpha^{\beta-1}\left(\log\alpha\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta} - \sum_{i=1}^{n}(t_i^{-\beta}\log t_i)\right) - n\alpha^{-1} + \gamma a\alpha^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta}$$

$$J_{\gamma\gamma}(\theta) = n\gamma^{-2} + (b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-\beta}(\frac{\alpha}{t_i})^\beta e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta}}{(1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^\beta})^2}$$

$$J_{\alpha\gamma}(\theta) = J_{\gamma\alpha}(\theta) = \beta\alpha^{\beta-1}\left(a\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta} - (b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-\beta}e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}}[1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}} - \gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}]}{(1-e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t_i})^{\beta}})^2}\right)$$

$$J_{\beta\gamma}(\theta) = a\alpha^{\beta}\left(\log(\alpha)\sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta} - \sum_{i=1}^{n} t_i^{-\beta}\log(t_i)\right) + (b-1)\alpha^{\beta}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-\beta}e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}}{\left(1-e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}\right)^2}\right.$$
$$\left.\times\left[\log(t_i)\left(1-e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}\right) + \gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)\right] - \log(\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{-\beta}e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{-\beta}}}{1-e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}}\right\},$$

e $J_{\gamma\beta}(\theta) = J_{\beta\gamma}(\theta)$.

$$J_{\beta\beta}(\theta) = n\beta^{-2} + \gamma a\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\left[\log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)\right]^2$$
$$-\gamma(b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\left[\log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)\right]^2}{\left(1-e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}\right)^2}\left[e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}\left(\left(1-e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}}\right) - \gamma\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\right)\right]$$

Sob condições que são cumpridas pelos parâmetros no interior do espaço paramétrico, mas não no limite, a distribuição assintótica de $\sqrt{n}\ (\hat{\theta} - \theta)$ é $N_3(0, I(\theta)^{-1})$, em que $I(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação esperada. Este comportamento assintótico é válido se $I(\boldsymbol{\theta})$ é substituído por $J(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$, i.e., a matriz de informação observada evoluiu a $\hat{\theta}$. A normal multivariada assintótica $N_3(0, J(\theta)^{-1})$ distribuição pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados e regiões de confiança para os parâmetros individuais e para as funções de sobrevivência e risco.

5.8 ESTATÍSTICA DE ORDEM E ENTROPIA DE SHANNON

Considerando $F(x)$ a função distribuição acumulada e $f(x)$ a função densidade da distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada, tem-se que, a função distribuição acumulada da r-ésima estatística de ordem, indicada por $F_r(x)$, em que $r = 1, \ldots, n$, é dada por:

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} C_{n;i} \left(\frac{B\left(\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right], a, b\right)}{B(a,b)} \right)^{i} \left[1 - \left(\frac{B\left(\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right], a, b\right)}{B(a,b)} \right) \right]^{n-i},$$

em que $C_{n;i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

A função densidade da estatística de ordem, para esta distribuição, é definida da seguinte forma:

$$f_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\frac{B\left(\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right], a, b\right)}{B(a,b)} \right]^{r-1} \left[1 - \left(\frac{B\left(\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right], a, b\right)}{B(a,b)} \right) \right]^{n-r}$$

$$\times \left(\frac{\gamma\beta\alpha^{\beta} t^{-(\beta+1)} \exp\left[-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]}{B(a,b)} \left(1 - \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]\right)^{(b-1)} \right),$$

em que $0 < x < \infty$.

A Entropia de Shannon é utilizada para medir o grau de incerteza sobre um espaço desordenado. Para uma variável aleatória T, esta medida é dada por:

$$E\Big(- \log[f(T)]\Big).$$

Considerando que $f(T)$ na expressão anterior seja a função densidade da Distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada, tem-se:

$$\log(f(T)) = \log \left(\frac{\gamma\beta\alpha^{\beta} t^{-(\beta+1)} \exp\left[-a\gamma\Big(\frac{\alpha}{t}\Big)^{\beta}\right] (1 - \exp\left[-\gamma\Big(\frac{\alpha}{t}\Big)^{\beta}\right])^{(b-1)}}{B(a,b)} \right)$$

Logo,

$$E\{-\log[f(T)]\} = \int_0^\infty -\left(\log(\gamma) + \log(\beta) + \beta\log(\alpha) - (\beta+1)\log(t) - a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right.$$
$$+ (b-1)\log\left(1 - \exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right]\right) - \log B(a,b)\Bigg\}$$
$$\times\left(\frac{\gamma\beta\alpha^\beta t^{-(\beta+1)}\exp\left[-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right](1-\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right])^{(b-1)}}{B(a,b)}\right)dt$$

Então concluí-se que a Entropia de Shannon para a Distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada é dada pela sentença (5.1), a seguir.

$$\begin{aligned} E\{-\log[f(T)]\} &= -\log\gamma - \log\beta - \beta\log\alpha - a(\psi(a) - \psi(a+b)) \\ &+ \log B(a,b) - (b-1)(\psi(b) - \psi(a+b)) + \frac{\gamma\beta\alpha^\beta(\beta+1)}{B(a,b)} \\ &\times \int_0^\infty t^{-(\beta+1)}\log(t)\left(\exp\left[-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right]\right)\left(1-\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right]\right)^{(b-1)}dt, \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que $\psi(x)$ represente a função digama, e $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

5.9 MODELO DE REGRESSÃO PARA A DISTRIBUIÇÃO LOG BETA WEIBULL INVERSA GENERALIZADA

Seja a distribuição

$$f(t; a, b, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma\beta\alpha^\beta t^{-(\beta-1)}\exp\left[-a\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right]}{B(a,b)}\left(1-\exp\left[-\gamma\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta\right]\right)^{(b-1)}$$

Considerando $\beta = \dfrac{1}{\sigma}$, $y = \log(t)$ e $\alpha = \exp\mu$, em que $t = e^y$, tem-se:

$$f(y; a, b, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\exp[\frac{\mu - y(1+\sigma)}{\sigma}]\gamma}{\sigma B(a,b)}\exp[-a\gamma e^{(\frac{\mu-y}{\sigma})}](1-\exp[-\gamma e^{(\frac{\mu-y}{\sigma})}])^{(b-1)} \quad ,$$

sendo $1+\sigma \approx 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(y;a,b,\alpha,\beta,\gamma) &= \frac{\gamma}{\sigma B(a,b)} \exp\left\{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - a\gamma \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\} \\ &\times \left\{1-\exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^{(b-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y;a,b,\alpha,\beta,\gamma) &= \frac{\gamma}{\sigma B(a,b)} \exp\left\{-\left(\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right) - a\gamma \exp\left(-\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right)\right\} \\ &\times \left\{1-\exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]\right\}^{(b-1)}, \end{aligned}$$

em que $y_i = {x_i}^T\beta_i + \sigma Z_i$, i = 1,...,n e Z_i segue a distribuição:

$$\pi(z_i\gamma) = \gamma \exp[-z - \gamma \exp(-z)],$$

em que $-\infty < z < \infty$ e $\gamma > 0$.

Função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{\gamma^n}{\sigma^n[B(a,b)]^n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_i-x_i^T\beta_i}{\sigma} - a\gamma \exp\left[-\frac{y_i-x_i^T\beta_i}{\sigma}\right]\right\}\right] \\ &\times \prod_{i=1}^{n}\left\{1-\exp\left[-\gamma\ \exp\left(-\frac{y_i-x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]\right\}^{(b-1)} \end{aligned}$$

A função log-verossimilhança é:

$$\begin{aligned} l(\theta) &= n\log\gamma - n\log\sigma - n\log[B(a,b)] - \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i-x_i^T\beta_i}{\sigma} - a\gamma\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right) \\ &+ (b-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]\right) \end{aligned}$$

As equações de escore são:

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\gamma} = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right)\left\{\frac{(b-1)\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]}{1-\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i-{x_i}^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]} - a\right\}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial a} = n(\psi(a+b) - \psi(a)) - \gamma \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{y_i - {x_i}^T \beta_i}{\sigma}\right)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial b} = n(\psi(a+b) - \psi(b)) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(1 - \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - {x_i}^T \beta_i}{\sigma}\right)\right]\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - x_i^T \beta_i}{\sigma^2}\right) &\left\{1 - \gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T \beta_i}{\sigma}\right)\right. \\ &\times \left.\left[a - \frac{(b-1)\exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T \beta_i}{\sigma}\right)\right]}{\left(1 - \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T \beta_i}{\sigma}\right)\right]\right)}\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^T}{\sigma} \left[1 + \gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T \beta_i}{\sigma}\right) \frac{(b-1)\exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T \beta_i}{\sigma}\right)\right]}{\left(1 - \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - {x_i}^T \beta_i}{\sigma}\right)\right]\right)}\right]$$

Novamente, as funções escores descritas não têm forma fechada. Através da matriz de informação observada de Fisher pode-se encontrar as soluções a partir do método interativo de Newton-Raphson. Assim a matriz de Informação Observada é:

$$\hat{\theta} - \theta = [J(\theta)]^{-1} U(\theta)$$

E é necessário encontrar a matriz de informação observada de Fisher $I(\theta)$

$$\mathbf{I}(\theta) = \begin{pmatrix} J_{\sigma\sigma}(\theta) & J_{\sigma\beta_i}(\theta) & J_{\sigma\gamma}(\theta) & J_{\sigma a}(\theta) & J_{\sigma b}(\theta) \\ J_{\beta_i\sigma}(\theta) & J_{\beta_i\beta_i}(\theta) & J_{\beta_i\gamma}(\theta) & J_{\beta_i a}(\theta) & J_{\beta_i b}(\theta) \\ J_{\gamma\sigma}(\theta) & J_{\gamma\beta_i}(\theta) & J_{\gamma\gamma}(\theta) & J_{\gamma a}(\theta) & J_{\gamma b}(\theta) \\ J_{a\sigma}(\theta) & J_{a\beta_i}(\theta) & J_{a\gamma}(\theta) & J_{aa}(\theta) & J_{ab}(\theta) \\ J_{b\sigma}(\theta) & J_{b\beta_i}(\theta) & J_{b\gamma}(\theta) & J_{ba}(\theta) & J_{bb}(\theta) \end{pmatrix}$$

em que $-\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \sigma}\right] = J_{\rho\sigma}(\theta)$ em que ρ e σ são parâmetros da distribuição em questão e

θ o vetor de parâmetros, então

$$J_{\sigma\sigma}(\theta) = -\frac{n}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma^2} \right) \left(\frac{2}{\sigma} + a\gamma \left(\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \left[\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma} \right] \right) \right) \right.$$

$$- \frac{\gamma(b-1)\exp\left[-\left[\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) + \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] \right]}{\left(1 - \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] \right)^2} \left(-\gamma \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma^2} \right) \right.$$

$$\times \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) + \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma^2} \right) - \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma^2} \right)$$

$$\left. \left. - \frac{2}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] \right) \right\}$$

$$J_{\beta_i\beta_i}(\theta) = \gamma \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{x_i^T}{\sigma} \right) \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \left(a - (b-1) \left(\frac{x_i^T}{\sigma} \right) \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left[1 - \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] - \gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] \right) \right\}$$

$$J_{\gamma\gamma}(\theta) = \frac{n}{\gamma^2} + (b-1) \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\exp\left[-[\gamma \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] + 2\left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right)] \right]}{\left(1 - \exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma} \right) \right] \right)^2} \right\}$$

$$J_{aa}(\theta) = n\psi^{(1)}(a) - n\psi^{(1)}(a+b)$$

$$J_{bb}(\theta) = n\psi^{(1)}(b) - n\psi^{(1)}(a+b)$$

$$J_{a\gamma}(\theta) = J_{\gamma a}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \exp[-(\frac{y_i - {x_i}^T\beta_i}{\sigma})]$$

$$J_{a\sigma}(\theta) = J_{\sigma a}(\theta) = \gamma \sum_{i=1}^{n} \left\{ \exp[-(\frac{y_i - {x_i}^T\beta_i}{\sigma})](\frac{y_i - {x_i}^T\beta_i}{\sigma^2}) \right\}$$

$$J_{ab}(\theta) = J_{ba}(\theta) = -n\psi(a+b)$$

$$J_{b\gamma}(\theta) = J_{\gamma b}(\theta) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\exp[-[\gamma\exp[-(\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]] + (\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]}{(1-\exp[-\gamma\exp[-(\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]])}\right\}$$

$$J_{b\sigma}(\theta) = J_{\sigma b}(\theta) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\gamma\exp[-[\gamma\exp[-(\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]] + (\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]}{(1-\exp[-\gamma\exp[-(\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]])}\right\}$$

$$J_{a\beta_i}(\theta) = J_{\beta_i a}(\theta) = \gamma\sum_{i=1}^{n}\left\{\exp[-(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma})](\frac{-x_i^T}{\sigma})\right\}$$

$$J_{b\beta_i}(\theta) = J_{\beta_i b}(\theta) = -\gamma\sum_{i=1}^{n}\left\{(\frac{x_i{}^T}{\beta_i})(\frac{\exp\left\{-[\gamma\exp[-(\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})] + (\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]\right\}}{1-\exp[-\gamma\exp[-(\frac{y_i - x_i{}^T\beta_i}{\sigma})]]})\right\}$$

$$\begin{aligned}
J_{\gamma\sigma}(\theta) = J_{\sigma\gamma}(\theta) = \sum_{i=1}^{n}&\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\\
&\times\left\{a + \frac{(b-1)\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]}{\left(1-\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]\right)^2}\left[\gamma\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]-1\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\gamma\beta_i}(\theta) = J_{\beta_i\gamma}(\theta) = \sum_{i=1}^{n}&\left(\frac{x_i^T}{\sigma}\right)\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T}{\sigma}\right)\\
&\times\left\{\left[-a - \frac{(b-1)\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T}{\sigma}\right)\right]}{\left[1-\exp\left[-\gamma\exp\left(-\frac{y_i - x_i^T}{\sigma}\right)\right]^2\right]}\right]\xi\right\},
\end{aligned}$$

em que $\xi = \left[1 - \exp\left[-\gamma \exp\left[-\left(\frac{y_i - x_i^T}{\sigma}\right)\right]\right] - \gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T}{\sigma}\right)\right].$

$$
\begin{aligned}
J_{\sigma\beta_i}(\theta) = J_{\beta_i\sigma}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^T}{\sigma^2}\right) & \left(1 + a\gamma \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i - \sigma}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right. \\
& - \gamma(b-1)\exp\left[-\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right. \\
& \left. + \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right] \left\{\exp\left[-\left[\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]\right] - 1\right. \\
& + \left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right) \left[1 - \exp\left[-\left[\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]\right]\right] \\
& \left. -\gamma \exp\left(-\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO

6.1 OS DADOS DO GADO DA RAÇA NELORE

A Produção comercial de carne vermelha no Brasil ,que comumente advém da raça Nelore, objetiva otimizar o processo na tentativa de obter um tempo mais curto para o gado alcançar o peso para o abate no período do nascimento até o desmame ou do desmame até o abate.

Utilizando os dados com 69 touros da raça Nelore foi estudado o tempo (em dias) até os bois atingirem o peso de 160kg referente ao tempo do nascimento até o desmame. Foi produzido a curva da função de densidade e o histograma, verificada também que o conjunto de dados tem forma unimodal. Sendo assim a distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada, será utilizada para modelar os dados em questão.

6.2 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Veremos os resultados da estimação de parâmetros do modelo da distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada, pelo o método de máxima verossimilhança vistos na subseção *(3.1.1)*.

6.2.1 Estimação através do método de máxima verossimilhança

Utilizando a expressão de $\ell(\theta)$ da subseção *(3.1.1)* que escrevemos em uma rotina para obter estimativas dos estimadores de máxima verossimilhança que não possuem formas fechadas com esta finalidade foi produzida uma rotina no software $R^{©}$ da versão 2.10.0 para estimar os valores do vetor de parâmetros $\theta = (a, b, \alpha, \beta, \gamma)^T$ da distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada para os dados do gado da raça Nelore. A rotina MaxBFGS tem por finalidade maximizar funções utilizando o método quase-Newton desenvolvido

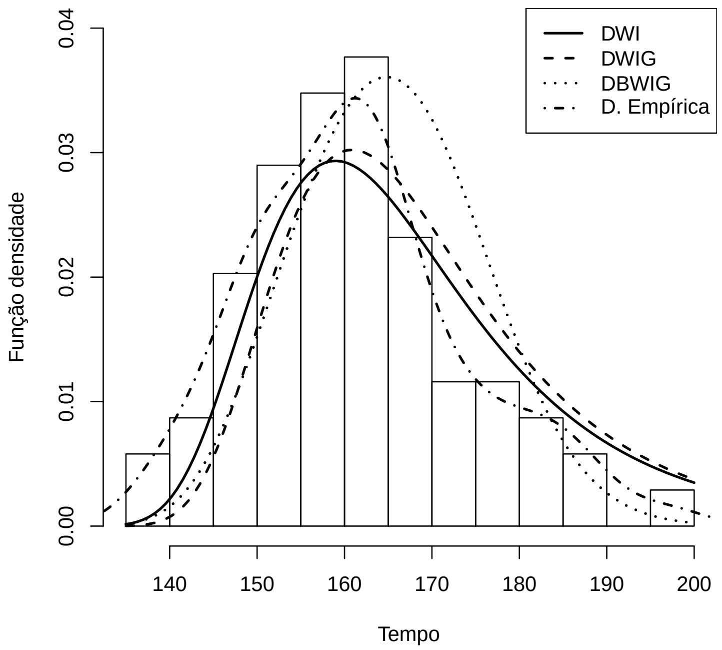

Figura 6.1 Histograma, funções densidade da Weibull Inversa, Weibull Inversa Generalizada, Beta Weibull Inversa Generalizada e Densidade Empírica.

por Broyden, Fletcher, Goldfarrb e Shanno (BFGS) dando a possibilidade de escolha de condições e parâmetros da maximização, como a utilização de derivadas analíticas ou numéricas da função a ser maximizada, os critérios de convergência, o número máximo de iterações, etc..

Tabela 6.1 Valores estimados dos parâmetros a, b, α, β e γ pelo método de máxima verossimilhança para os dados do gado da raça Nelore para: DWI, DWIG e DBWIG.

Parâmetro	Estimativa(DBWIG)	Estimativa(DWIG)	Estimativa(DWI)
a	0.2409561		
b	7.9618524		
α	147.5146548	142.514855	159.91782
β	9.6424368	13.25	12.71556
γ	15.5239771	5.344753	

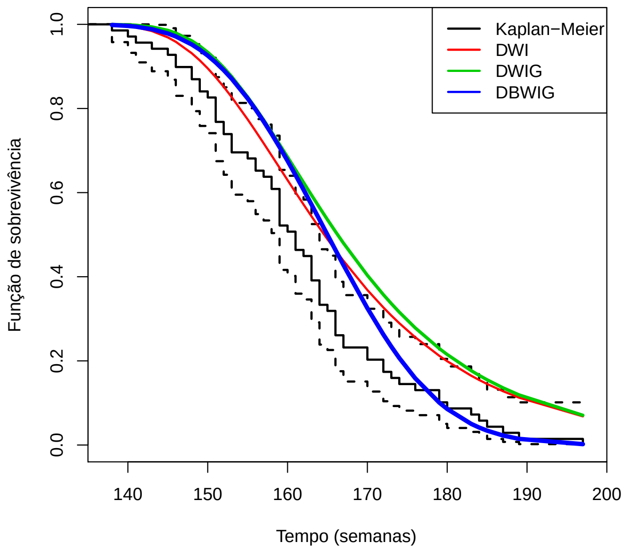

Figura 6.2 Comparação entre sobrevivências geradas pelas distribuições DWI, DWIG, DBWIG e Kaplan-Meier esboçadas no esquema S(t) versus tempo. As curvas tracejadas são os intervalos de confiança 95 porcento para o Kaplan-Meier.

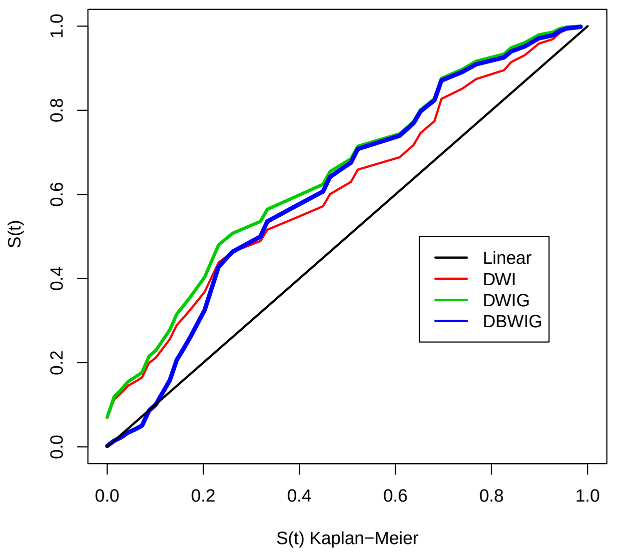

Figura 6.3 Comparação entre sobrevivências geradas pelas distribuições DWI, DWIG, DBWIG e Kaplan-Meier esboçadas no esquema de linearização.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi introduzida a distribuição Beta Weibull Inversa Generalizada que é uma generalização beta da distribuição Weibull Inversa Generalizada. Foi providenciado um tratamento matemático e foram derivadas várias propriedades da Beta Weibull Inversa Generalizada, incluindo a função geratriz de momentos e o k-ésimo momento. Ainda foi discutido a estimação pelo procedimento de máxima verossimilhança e encontramos a matriz de informação observada.

Também foi modelado um conjunto de dados de gado da raça Nelore, encontrando as estimativas para os parâmetros. Com as estimativas foi percebido que a distribuição proposta conseguiu um bom ajuste para os dados através da comparação com o histograma e com a densidade empírica, concluímos que a classe Beta Weibull Inversa Generalizada de distribuições fornece maior flexibilidade para tratamento das análises estatísticas devido a esta distribuição ter 5 parâmetros e conter várias propriedades da distribuição beta.

Espera-se que esta nova distribuição estimule profissionais e pesquisadores a produzirem mais aplicações em diversas áreas do conhecimento, uma vez que esta nova distribuição tem a característica de ser bastante flexível quando se refere ao ajuste de dados.

A autora pretende continuar com as pesquisas em distribuições com generalizações beta aplicadas em outras distribuições de probabilidade e ainda temos planos de prover análises bayesianas para as novas distribuições betas generalizadas e produzir comparações entre resultados das análises clássicas e bayesianas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abramowitz, M., Stegun I. P. (1972). Handbook of mathematical functions. Edited by Miltom Abramowitz and Irene A. Stegun , Dover publications, Inc.,New York.

[2] Barroso, Filho, C., Carvalho, Maia (1987). *Cálculo Numérico (com Aplicações).* Harbra, São Paulo.

[3] Bolfarine, H., Sandoval, M.C. (2000). *Introdução à Inferência Estatística.* Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo.

[4] Brito, R. S.*Estudo de expansões assintóticas, avaliação numérica de momentos das distribuições beta generalizadas, aplicações em modelos de regressão e análise discriminante.* Dissertação, Programa de pós-graduação em Biometria e Estatística aplicada, UFRPE, Recife, 2009.

[5] Bucar, T., Nagode, M., Fajdiga, M. (2004). *Reliability approximation using finite Weibull mixture distributions.* Reliability Engineering and System Safety, **84**, 241–251.

[6] Bury, K. (1999). *Statistical Distributions in Engineering.* New York: Cambridge University Press.

[7] Choudhury, A. (2005). A Simple Derivation of Moments of the Exponentiated Weibull Distribution. *Metrika,* **62**, 17-22.

[8] Colosimo, E.A., Giolo, S.R. (2006). *Análise de sobrevivência aplicada.* Edgar blucher, 392p, São Paulo.

[9] Cordeiro, G.M. (1992). *Introdução a teoria assintótica.* 22º Colóquio Brasileiro de Matemática.

[10] Cordeiro, G.M. (1999). *Introdução a teoria da verossimilhança.* 10º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.

[11] Doornik, J. (2007). Ox: An object-oriented matrix programming language. International Thomson Bussiness Press.

[12] Graham, V.A., Hollands, K.G.T. (1990). Method to generate synthetic hourly solar radiation globally.*Solar Energy* 333–341.

[13] Gupta, R.D., Kundu, D. (1999). *Generalized exponential distribution.* Australian and New Zeland Journal of Statistics. **41,2**, 173–188.

[14] Gusmão, F. R. S. de, Ortega, E. M. M., Cordeiro, G. M. (2009). *The generalized inverse Weibull distribution.* Statistical Papers. **DOI: 10.1007/s00362-009-0271-3**.

[15] Gusmão, F. R. S.*Uma abordagem bayesiana para distribuição Weibull inversa generalizada.* Dissertação, Programa de pós-graduação em Biometria e estatística aplicada, UFRPE, Recife, 2008.

[16] Janardan, K. G., Padmanabhan, G. (1986). Double bounded beta distribution for hydrologic variables. *Proceedings of 17th Annual Pittsburgh Conference*, 1107–1111.

[17] Jiang, R., Murthy, D.N.P, Ji, P. (2001). Models involving two inverse Weibull distributions. Reliability Engineering and System Safety, **73**, 73–81.

[18] Johnson, N., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions.* 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 235.

[19] Lai, C. D., Xie, M., Murthy, D. N. P. (2003). A modified Weibull distribution. *Transactions on Reliability,* **52**, 33-37.

[20] Louzada-Neto, F., Mazucheli, J. e Achcar, J. A. (2001). Uma Introdução à Análise de Sobrevivência e Confiabilidade. *XXVIII Jornadas Nacionales de Estadística.* Chile.

[21] Maffet, A.L., Wackerman, C.C.. (1991). The modified beta density function as a model for synthetic aperture radar clutter statistics. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 277–283.

[22] Magalhães, M.N., Lima, A.C.P. (2008). *Noções de Probabilidade e Estatística.* EdUSP, São Paulo.

[23] McNally, R.J. (1990). Maximum likelihood estimation of the parameters of the prior distributions of three variables that strongly influence reproductive performance in cows. *Biometrics*, 501–514.

[24] Milyutin, E.R., Yaromenko, Y.I. (1991). Statistical characteristics of atmospheric transparency index over tilted routes. *Meteorologiya i Gidrologiya*, 72–76.

[25] Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. e Kollia, G. D. (1996). *A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data.* J. Americ. Statist. Assoc., **91**, 1575-1583.

[26] Nadarajah, S.,Kotz, S. (2004). The beta Gumbel distribution.*Mathematical Problems in Engineering*. **4**, 323-332.

[27] Rajarshi, S., Rajarshi, M. B. (1988). Bathtub distributions: a review. *Commun. Statatist. Theory. Meth.,* **17**, 2597-2521.

[28] Silva, G. O., Ortega, E. M., Cordeiro, G. M. (2003). The beta modified Weibull distribution. *Lifetime Data Anal.* **3**, 409-30.

[29] Sondow, Jonathan (1998). An antisymmetric formula for Euler's constant. *Mathematics Magazine* **71**: 219-220.

[30] Stewart, J., Castro, H.C. (2009). *Cálculo, V.2.* Cengage, São Paulo.

[31] Sultan, K. S., Ismail, M. A., Al-Moisheer, A. S. (2007). Mixture of two Weibull distributions: Properties and estimation. *Computacional Statistics and Data Analisys*, **51**, 5377-5387.

[32] Venables,W. N., Smith, D. M. and the R Development Core Team (2008). *An Introduction to R.* R Development Core Team.

[33] Wiley, J.A., Herschokoru, S.J., Padiau, N.S. (1989). Heterogeneity in the probability of HIV tranamission per sexual contact: the case of male-to-female transmiton in penile-vaginal intercourse. *Statistics in Medicine*, 93–102.

[34] Xie, M., Lai, C. D. (1995). *Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. Reliab. Eng. Syst. Safety*, **52**, 87-93.

[35] Xie, M., Tang, Y., Goh, T. N. (2002). A modified Weibull extension with bathtub failure rate function. *Reliab. Eng. Syst. Safety*, **76**, 279-285.